真の Hilbert 像をもとめて
- Hilbert 研究の現状-

京都大学大学院文学研究科
林　晋

平成22 年 3 月 18 日

1　Hilbert研究の近況

1990 年代から David Hilbert の研究が格段に進み、 従来の Hilbert 像が大きく変わりつつある. 著者と共同研究者の研究も含めて, Hilbert 研究の現状と,「新しい Hilbert 像」を紹介する.

1.1　1980 年代以前の Hilbert 研究

Hilbert 研究が大いに進み始めた 1990 年代より前, Hilbert についての研究の内で特筆すべきものは, Blumenthal の追悼論文 [1], C. Reid による伝記 [13], Toepell の「幾何学基礎」成立史 [12] の三つであった.

Blumenthal の追悼論文は, Hilbert の古い学生としての自身の経験の記憶の記述や, 今は失われてしまった Hilbert から Minkowski への書簡を Blumenthal が読んでおり, 断片的ながら, それについての記述を含んでいるという点で, 一次史料の性格が強い, 非常に貴重な文献である. C. Reid の伝記でも, この Blumenthal からの引用がかなりの数に上る.

その C. Reid の伝記は, 基本的には一般向け読み物, つまりノンフィクションのルポというもので, Reid 氏自身が自身の著書をそのように位置づけているようである. しかし, Reid 氏が著名な数理論理学者 Julia Robinson の姉であることもあり, 多くの Hilbert の知己, 特に Paul Bernays との密接な親交関係があり, これらの歴史の登場人物たちからの証言を聞きだ

し, それが記録されている点において, 結果として, いわゆるオーラルヒストリーによる歴史記録となっており, これも一次史料としての性格を持つものである. 著者と共同研究者の八杉が, Reid 氏をインタビューした際の, Reid 氏の発言では, 同じユダヤ人である Bernays との信頼関係が殊更強かったようである. したがって, Reid の伝記中の Bernays の発言の記録は, 特に一次史料として高い価値を持つと言ってよいだろう.[1]

残りの一つ, Michael Toepell の「幾何学基礎」成立史は, この二つと異なり, Hilbertが残した幾何学についての講義録の綿密なテキスト分析による本格的な歴史研究であり, 1990 年代以後の Hilbert Nachlaßに基ずく一連の研究の先駆けというべき優れた研究である.

1.2 Hilbert 遺稿集の研究:1990 年代以後の Hilbert 研究

1990 年代以後に盛んになった Hilbert 研究は, この Toepell の研究と同様, Hilbert の遺稿集を基にして行われている. Hilbert は歴史に名を残す大数学者としては比較的寡作の部類に属す. その選集は, 僅かに 3 巻であるに過ぎない. 選集には「幾何学基礎論」などの著書が含まれていないが, それらを含めても決して多いとはいえない. しかし, これは論文や著書とした出版されたものだけを, Hilbert の「著作」と考えた場合のことである.

Hilbert は, 非常に多くの講義を行ったが, その多くは彼自身が作り出した新理論を講義するものであった. 彼においては教育と研究が, 殊更に強く結合していたのである. その講義録は, 常に学生たちや同僚たちの自由な閲覧に供されていたので,[2] Göttingen のサークルに属する人々にとっては, Hilbert の講義録は著書に近い存在であったと言える.

つまり, Hilbert と, その周辺では論文, 著書に, 膨大な講義録を追加して, 初めて Hilbert の数学の全体なのである. 講義録を無視したのでは, Hilbert の数学の姿に対して, 周辺の数学者や本人が持っていたイメージさえも捉えることができないのである. これについて, もう少し詳しく説明しよう.

書簡が重要な「発表媒体」だった時代もあるように, 時代・地域等によ

[1]Bernays についてはスイス工科大学に, スイスの科学史家による Bernays のインタビューが録音テープで残されており, これを W. Sieg 氏を中心として翻刻する作業が行われている. これと付き合わせることにより, Reid の伝記の史料としての価値は判断できるだろう.

[2]講義録作成と公開のプロセスについては, [4] の Introduction to the Edition を参照.

り知識の伝達媒体は変化する．研究対象が使っていた知識の伝達媒体を見誤ると, その知識の総体を捉えることができない．例えばインターネットと TEX の登場以後, 個人的なメールによる情報交換, 掲示板への投稿, ホームページへの貼り付けなどで, 数学の重要な研究成果が「発表」されるケースが増えている．将来の数学史家は, 20 世紀末以後の数学史を研究するとき, インターネットのログや掲示板の記録を研究対象とせざるを得なくなるだろう.[3]

実は, 現代の Hilbert 研究者も, これに似た状況に置かれているのである．David E. Rowe は, そのエッセイ "Making Mathematics in an Oral Culture: Göttingen in the Era of Klein and Hilbert" [14] で, Klein-Hilbert を中心とする Göttingen 数学の黄金時代には, 文書によるコミュニケーション以上に発話によるコミュニケーションが重要な役割を果たしていたことを指摘している.

これは Rowe が指摘するように, Klein, Hilbert の Göttingen 数学会やセミナーでのイニシアティブの影響が大であることは間違いないであろうが, それを可能にした地理的・社会的条件として, 直径わずかに 1.5 キロメートル程度の Göttingen 市街に, 世界の代表的頭脳が集積し, 熾烈な研究競争が行われたことがあったと思われる.[4]そのスピードについていくには書くという行為は遅すぎたに違いない．発表できるだけの論文を書いている間にライバルは, さらに研究を進めるかもしれないのである.

当然, Göttingen 時代の Hilbert が彼を取り巻く人々に向けて発した彼の数学についての情報にも, このようなオーラルなものが相当にあると判断した方が良い．そして, 講義は半ばオーラルなコミュニケーションであり, また, 文書化されるにしても, その「出版」までのスピードは速いし,

[3] これらは紙を媒体とする, 書簡, メモ, 論文原稿や予稿と異なり, 意識的に保存しないと消えてしまう可能性が高いものである．特にインターネットの黎明期のメールなどの情報は, すでにその多くが消滅している可能性が高い．将来, この時代の数学史に大きな穴が開いてしまう可能性がある.

[4] Göttingen 旧市街は散歩道となっている直径約 1km の環状の土塁 (Wall, Stadtwall) に囲まれており, 旧図書館などは, この中にある．Gauß, Riemann, Klein, Hilbert たちが所属した天文台や数学研究所は, この土塁の外の「郊外」の, ただし, Wall からそれほど離れていない場所にある．19 世紀最初の天文台の建築のころには田園地帯であった「郊外」に, 現在は大学関係者などの住居が立ち並んでいるが, Klein, Hilbert たちの旧居も, 天文台や数学研究所とほぼ反対の位置の郊外の住宅街に位置している．この住宅街には歴史に名を残す学者たちの旧居が立ち並んでいる．Hilbert の旧居から道を隔てて斜め向かいに Klein の旧居があり, 左手に進みさらに左に直角に折れると Husserl の旧居がある．Göttingen 大学によれば, 何らかの形で Göttingen 大学の関係者とみなせるノーベル賞受賞者は 44 名であり, その受賞時期のほとんどが 20 世紀前半であるという.

また発展途上の不完全な理論を聴衆である学生や同僚たちに提示することもできる.

しかも, Göttingen 時代の Hilbert の場合, その聴衆たちには Weyl, Heisenberg, von Neumann などのやがて歴史に名を残す若い数学者・科学者たちが相当数含まれていたのであり, また, その人たちが Hilbert のために講義録を執筆していたのである. 例えば 20 世紀初頭の講義録の執筆者の中には, Born, Courant, Haar, Hellinger の名前が見える.

もし著者が Hilbert の立場にあるのであれば, 論文や著書を通して不特定多数で未知の読者たちに対して語りかけるよりは, 自分の近くにいる若い偉大な才能たちに直接語りかけることの方に魅力を感じるだろう. しかも, その若者たちが, Hilbert の名で論文や著書を執筆してくれることもあるのである. Göttingen 時代の Hilbert が, その発表活動の重点を講義に置いていたとしたら, それは寧ろ合理的だったといえる. その方が数学は速く進むのである. Hilbert の「情報発信」の多くの部分が, 論文・著書ではなく, 講義や講義録により行われていたと考えてもおかしくない. そして, この事情を考慮しないと, Hilbert の数学の総体を捉え損ねる.

例えば, Hilbert の物理学関連の論文は数が少なく, その研究は 重力場方程式を巡る Einstein との「競争」というコンテキスト以外では注目されることは少なかったが, 遺稿集の講義のリストだけを見ただけで, その印象は大きく変る.[5] 20 世紀初頭の Hilbert の講義は, その多くが物理学や, それに関連した解析学に関するものなのである. Hilbert にとって物理学が如何に重要であったかは, 遺稿集研究に基づく, 最近の Corry の著書 [2] や Majer の論文 [11] で明らかにされている.

また, 我々の遺稿集研究により,「動機」としては, 物理学の公理化が先である可能性が高いことを示す史料が発見されている. これは物理学者 Heinrich Hertz の物理学思想の Hilbert 公理論への影響を強調する Corry の説と合致する.

また, Göttingen 時代の講義録の多くには, Hilbert のカラフルな「肉声」が収められており, それが彼の数学思想や歴史観を理解するための有用な情報を与えてくれる. 書簡や講義録などの一次資料の研究が数学史研究において重要であることは当然のことであるが, Hilbert 研究においては, 以上のような特殊事情により, その講義録の研究が他の数学者の場合に比べても重要な意味を持つのである. また, Königsberg 時代には, そのような個別特殊の事情は薄かったものの, Hilbert は自身で十分詳細な

[5][4] の pp.607-623 に詳細な講義録リストがある.

講義録を書いており,[6] Göttingen 時代の講義録に比べれば, 情報は少ないものの, 貴重な「肉声」を見つけることができる.

このような Hilbert 遺稿集研究を行っている代表的研究者としては, Thiele, Peckhaus, Sieg, Mancosu, Zach, Corry, Majer, Ewald, Hallet をあげることができるが, これらの研究者の内, Majer, Ewald, Hallet, Sieg が editor を勤める, 遺稿集の出版計画 Hilbert edition がスタートしており, すでに幾何学の基礎についての講義録が出版されている [4].

Hilbert edition は, 次のような 6 巻で計画されており, 主に未刊の講義録をドイツ語原文で出版することを目指し, 英訳や解釈は, そのスコープに入っていない.

Vol.1: Foundations of Geometry, 1891-1902

Vol.2: Foundations of Arithmetic and Logic, 1894-1917

Vol.3: Foundations of Arithmetic and Logic, 1917-1933

Vol.4: Foundations of Physics, 1898-1922, Classical, Relativistic and Statistical Mechanics

Vol.5: Foundations of Physics, 1912-1927 Relativity, Quantum Theory and Epistemology

Vol.6: Notebooks and General Foundational Lectures

このリストから分かるように, 出版が予定されている講義録は「基礎関係」の分野に限定されており, 代数, 数論, 解析学などの, Hilbert の主要研究分野の講義録がスコープに入っていない. これが, この計画の大きな問題点であろう.

1.3 Hilbert 遺稿集

これらの研究が依拠している, 通称 Hilbert Nachlaß, Hilbert 遺稿集は, 実際には, 二つのコレクションからなる. 主なコレクションは SUB Göttingen (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, ゲッチンゲン・ニーダーザクセン州および大学図書館) の 手稿・貴重印刷物課が管理しているものである. この図書館は Gaußや Riemann, Klein,

[6]夫人の Käthe が筆記しているものも少なくない.

Cantor などの遺稿集も保有しており, 管理は極めて良く, 史料の配布もマイクロフィルムから焼いた資料に加えて, 近年では高価ではあるがカラーのデジタル画像による配布も始めており, メールで資料番号を伝えれば, 簡単にこれらの資料を購入することができるようになっている. また, Hilbert の遺稿集では, まだ実現されていないようだが, Klein の手稿などの一部の資料は, GDZ (Göttinger Digitalisierungszentrum) において, デジタル化されて Web で無料公開されている. 同図書館は, これらの資料を強いコントロールの元に置きたい意向のようだが, おそらくは, 長期的には全資料が無料でオンライン公開する方向に向かうのではないかと想像される.

Hilbert 研究者が, Hilbert 遺稿集というとき, それは, この SUB のコレクションに, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen 所蔵の講義録をあわせたものを意味しているのが普通である. この数学研究所の講義録は, 20 世紀に入ってのものが主であり, タイプ打ちされたものも多い. 残念ながら, 数学研究所のコレクションの管理はあまり良い状況ではなく, 早急に SUB に移管するか, 保管状況を改善すべきと思われるが, どうやら数学研究所の財政状況はそれほど良くはないようなので, これは望み薄かもしれない.

Hilbert に関連した資料のコレクションとしては, この 2 つの他に, 正田健次郎が買い取って寄付した, 名古屋大の膨大な別刷りコレクションや, 米 Cornell 大の図書館に保管されている, Hilbert の学生が持ち帰った不変式論講義録などがある. また, Klein Nachlaßなどには, Hilbert からの手紙が保存されており, Klein-Hilbert 書簡集や, Minkowski からの Hilbert への書簡集[7]などがあり, 一部は既に出版もされている.

SUB Göttingen と数学研究所のコレクションの内容を簡単にまとめておこう. まず SUB のコレクションであるが, 次のようになっている. ただし, 数字は資料番号であり, 各資料は, たとえば, Cod. Ms. Hilbert 457 というように呼ばれる.

- 書簡 1-457
- 推薦書等 458-493
- Göttingen 数学セミナー報告 494
- 学生時代の講義ノート 495-519

[7]残念なことに, Hilbert から Minkowski への書簡は失われている.

- 講義録 520-570
- 講演等 571-599
- ノート・メモ類 600-681
- その他の原稿 682-740
- Biographisches 741-792（旅行記から夫人・子息の手紙など様々）.

これらの各資料の分量は様々である. 講義録の場合は 200 頁程度が多い. しかし, 200 頁をはるかに超える大部の講義録もあるし, 通信相手毎に番号付けられた書簡の場合には数頁という場合もある.

ノート類には, 著者が主に研究している, 600 番の「数学手帳」(日記) があり, これは三冊で全 400 頁ほどある. SUB の手稿・貴重印刷物課長の Helmut Rohlfing 博士の話では, この Hilbert 数学手帳（研究者の間では「日記」と呼ばれることも多い）を, 著名な Gaußの数学日記とならんで, 同課が保有している重要な「日記」として位置づけているとのことである.

SUB のコレクションが日記や書簡を含むのと異なり, 数学研究所のコレクションは基本的にはすべて講義録からなる. ただし, 例外として日本人数学者からの献本とみられる幾何学基礎論の和訳が含まれている. 数学研究所は, 89 冊の講義録を所有しており, 一つの資料は短いものは 100 頁ないが, 長いものは 400 頁を超える. おそらく, 200 頁程度が平均と思われる. 20 世紀に入ってのもの, たとえば物理学の公理化時代の講義録は, こちらに多い.

これらの資料は, 木製の古い棚に並べられているだけで, 目録も整備されたものはなく, 教員が無断で持ち出すこともあるなど, 保管状態はあまり良いとはいえない. 2007 年初夏に著者が訪問調査し自家製のリストを作ったが, 2 冊は行方不明だった. 図書室職員によると常習的に無断で持ち出す教員がおり, その時もその人らしいとのことであった.

また, 図書館での資料の記録や複製の伝統的方法であるマイクロフィルム化もなされていない. 2000 年ころに訪問したとき複製を依頼すると, オリジナルからゼロックス・コピーをとるとのことだった. そのころから比較すれば, 各資料に栞で番号付けがなされるようになったし, ゼロックス・コピーでなくスキャンと電子媒体による複製が開始されるなど, ある程度の改善は見られる. ちなみに, このスキャンによる複製と頒布は, 著者が 2007 年度夏に物理学関係を中心に１０数件の講義録を購入した時に開始

された．しかしながら, SUB の画像コピーではカラーを選択できるのに比べ, こちらはモノクロのみである．また, 頒布も細切れにしてメールで送ってくるなど, 貴重書のセクションの厳格なルールに従って管理されている SUB の遺稿集と異なり, 通常の図書館業務の片手間に Hilbert の遺稿集も管理しているというのが実情である．数学研究所の資料は SUB のものと比較して新しいものが多いため, 経年変化による問題は少ないが, 将来に向けて管理の改善が望まれるところである．

ちなみに、これらの遺稿集を研究している（いた）研究者を, 分野別にまとめると次のようになる．

代数学（不変式論）林

代数的整数論　×

幾何学 Toepell, Hilbert edition

数学基礎論 Peckhaus, Zach, ⋯

解析学（積分方程式とディリクレ原理）　×

物理学（の公理化） Corry, Majer

数学基礎論 Sieg, Mancosu, Zach, Peckhaus

ただし, ×は未だ手が付いていないことを示す．また, 著者の学生である橋本雄太が, Hilbert の実数論の研究を進めている [19].

2　Hilbert の数学ノートブック

前節でも述べたように, 著者は Hilbert の数学ノートブック, あるいは, 数学日記とも呼ばれる, Cod. Ms. D. Hilbert 600:1-3 を導き手に, 1892 年以前の不変式論研究の時代を中心に Hilbert の数学思想について調べている．この研究は, 著者の「近代性研究」の一環であり, 最終的な目標は, 19-20 世紀数学の「基礎付け運動」や「19-20 世紀数学革命」を Weber 社会学の意味での近代化の典型ケースとして捉え, それをドイツの近代化の流れの中に置くことにより, それが持つ社会的位置を把握し, その上で視点を反転させて, 19 世紀ドイツ数学の位置から, 同時代ドイツおよび関連諸国の「近代化」の様相を照らし出すことを目指している．

つまり, 意図としては, 多分に歴史社会学的である. また, 研究が進むに従い, 予想外に強い「Kant 哲学」の影響を物語る Königsberg 時代の史料が発見されるなどして, 思想史的な側面をも含む研究となりつつある.[8]しかしながら, 著者は, これらのような思弁的研究は, 極力, 歴史資料に基づく地道な実証主義的歴史学研究の上に行われるべきだという方針の下に研究を行っているため, その研究の多くの部分は, 退屈ともいえる一次資料の分析に基づいている.[9]

今回紹介する研究成果の多くも, 思弁的議論を排した実証主義的文献学的研究によって得られた成果である. 数学ノートの豊潤な内容は, そのような「無味乾燥」な研究方法にのみ依存しても, 驚くべき知見を提供してくれる.

たとえば, 文献学的手法のみにより, 旧来の Hilbert についての「常識」のいくつかを反証する新知見が得られるのである. たとえば, 文献学的なテキスト分析のみにより, 次のような事実が実証できる「Hilbert の数学の基礎への興味は、彼の最初の研究分野であった不変式論研究の頃からのものであり, Hilbert はそれを強く Kant 哲学と関連させて考え, 1900 年のパリ講演での「数学の可解性」も, その哲学的な思考の中で生まれており, しかも, Hilbert はそれを当時 (1880 年代) から数学的に証明しようとしていた形跡がある」.

これらの文献学的研究の詳細は, 現在, 執筆中の英文論文 [3] で公表する予定であるが, この報告では, 文献学的研究の紹介は控えめにし, それらに基づいた思弁的研究成果について簡単に報告しようと思う. その結果として, 本稿の結論のいくつかは, 実証主義的な歴史学の観点からは手法上の問題があるものであることを断っておきたい. 英文論文では, 実証主義的文献学的 (philological) な結論と, 歴史社会学的考察も厭わない解釈学的 (hermeneutic) な結論は, その違いが分かるように執筆しているが, それは容易ではなく, 本論のような解説的論考で, これを行うには無理がある. そこで近代的歴史学の手法をあえて曲げて解釈学的手法をとるのである. その意味で, 本稿は数学についての歴史学的文書ではなく歴史社会学的な文書であるといえる.

[8]ただし, おそらくドイツ教養人の常識としての Kant 哲学, つまり, 多分に通俗化された Kant 哲学であろうと思われる. また, Göttingen 時代には新 Fries 学派の哲学者 L. Nelson などと深い交流があったことが知られている.

[9]もちろん, 思弁的要素を完全に排除した歴史学的研究というものは本来不可能である. そればかりか, 思弁的方法の完全な排除は, むしろ歴史学の持つ実践的意味を減じてしまう. そこで, その完全な遂行が不可能と知りつつも, 極力実証主義的研究を試み続け, その成果の上に思弁的推論を行うというアプローチをとっている.

2.1 文献学的分析の方法

とは言うものの, 最初に紹介することは, 数学ノートの文献学的分析の方法, つまり, Hilbert 遺稿集, Cod. Ms. D. Hilbert 600:1-3 のテキスト分析の方法と, それによって得られた知見である.

まず名称であるが, 著者は, この資料を Hilbert's mathematical notebooks と呼んでいる. ドイツ語圏の研究者には, これを Tagebuch （日記）と呼ぶ人が少なくない. しかしながら, この 3 冊の日記には日付がないのである.

この資料が日記と呼ばれることが多いのは, それが 1886 年 11 月から 1930 年ころまで (不定期ながら）書き続けられた「ノート」の集積だからであろう. 日本語でノートという場合には, 英語の意味でのノートブック, つまり, ノート (覚書）を記録するためのブック, を意味することが多いが, この論説では, ノートとノートブックという言葉は, 英語の意味で使い分けている.

一つ一つのノートは, インクで引いた横線により明瞭に区別されている. つまり, この 3 冊のノートブックは, 数十年にわたって書き続けられた, ノートを線形の順番に並べたものなのである. ひとつのノートの大きさは 1 行だけのものからノートブックの 2 ページにわたるものまで千差万別である. また, 日付がつけられたノートはひとつもない.

日付がないため, ノートの記載の順番が歴史的時間オーダーであるかどうかの直接的保障はない. そればかりか, 文章の内容からして, 右（後）のページから, 左（前）のページ, という順でひとつのノートが書かれた箇所が実際に存在する. したがって, この史料を分析して, それから何がしかの意味のある情報を引き出すには, 少なくとも次のような作業が必要となる.

- 記述時期の同定. 例えば「1889 年夏から 1890 年春の間」等.
- 記述順序の整合性のチェック
- 翻刻
- 内容の解釈

これらの作業は互いに複雑に依存しており, 独立に進めることは多くの場合には不可能である. たとえば, 記述時期の同定では, 前に現れる文書が後に現れる文書より早い時期に書かれたという前提を使う. これを使って, 次のような推論ができる.

3 冊の数学ノートの第 1 冊目, 14 頁に, 後の第 14 問題と思われるノートがある：

> Beweis dass durch für alle Untergruppe der continuierliche lineare Transformation die Zahl alle Invarianten endlich is[, z.B. wo eine quadratiere Form in sich übergeht. Beweis durch Aufstellung der entscprchenden Differentialgl. (一部, 綴りミスの修正や補足を行った.)

これは有名な Gordan の問題の拡張であるが, 13 頁にも同問題の拡張についてのノートがある. 従って第 1 冊の 13-14 頁のあたりのノートは, 既に Gordan 問題を解いた後に書かれたと思われる. (ここでノートの翻刻と, 内容の理解を行い, さらには, それを元に Gordan 問題が解かれていたという推測を行っている.)

ところが, Klein 宛ての書簡により, 同問題は 1888 年 3-10 月の間に解決されたことが分かっている. したがって, この辺りのノートは, その時期以後のものと分かる. 一方で, 41 頁には零点定理の証明を追い求めているか, それを解決した, と解釈できるノートがある. 零点定理が発表された最初の論文の投稿日付は 1891 年 6 月 30 日. したがって, 14-41 頁のノートは, 1888 年 3 月-1891 年 6 月の間に書かれたものと判断できる.

以上が, 翻刻, 内容の解釈を元に, ノートが時間順に書かれていったという仮定を使って, 14-41 頁のノートの記述時期を同定する「論証」である.[10] これには「ノートが時間順に書かれていった」という仮定を使ったが, 少なくとも一箇所, 見開きの右（後）ページから左（前）のページの向きで書かれたノートがある以上, この仮説は絶対的なものではなく, これらの例外[11]を除き, ほとんどすべての場合に成り立つという意味である. そして, これは, 何らかの方法で確かめられるべき仮説である. もちろん, ある客観的かつ厳密に与えられた条件を満たせば, この仮説の正しさが立証されるなどという条件は与えることができない. この仮説は K. Popper の意味では科学的には立証できないのである. これは, 我々の研究が歴史学的研究である以上当然の宿命というべきだろう. しかしながら, 各ノートの内容が, ヒルベルトが発表したり, 講義したり, 書簡により他人に伝えたなどの, 彼の数学の歴史的流れとの整合性が立証できればできるだけ, この仮説の蓋然性はより高まる.[12] そして, また, それを利用して, 各ノー

[10] この同定のより詳しい説明は [3] を参照.

[11] ただし, 他にはみつかっていない.

[12] もちろん, このような考え方を疑問とする科学哲学などの思想はあるが, 著者はその

トの記述時期同定や, 翻刻・内容理解も進み, ちょうど実験科学で実験と理論が互いにブートストラップしてその蓋然性を高めていくように, 知識のネットワークの相対的な整合性・蓋然性を高めていくことはできる.

著者や橋本の研究の多くの部分は, こういう作業に費やされているが, これは実に細かく, 手間のかかる仕事である. そのため我々は, この作業を支援するソフトウェアを作り使っている. これにより作業がかなり楽になり, また速く進むようになっている [17].[13]

2.2 可解性原理 -Hilbert 数学基礎論の原点-

前節のような文献学的分析により 14-41 頁のノートは, 1888 年 3 月-1891 年 6 月の間に書かれたものと推測できる. これは Hilbert が有限基底定理により Gordan 問題を解決し, その証明の有限化のために, 零点定理の証明を追い求めていた時期にあたる.

有限基底定理は非構成的な定理である. つまり, それは有限の「基底」の「存在」は保証するが, それを実際に計算できるアルゴリズムは存在しないのである. この事実の故に, 伝統的に代数計算に重きを置いていたドイツ数学界の人々, 特に代数学者たちは, Hilbert の有限基底定理の証明を, すぐさま許容することができなかった. このため Hilbert は構成的に零点定理を証明し, それにより Gordan 問題を構成的に再度解きなおしている [18].[14]

この時期に属する 37 頁には 1900 年のパリ講演で登場した「すべての数学問題の可解性」が, パリ講演のものよりは, ずっと強い形で現れる. そのオリジナルのイメージとドイツ語の翻刻、英訳は [15] で閲覧できるので, ここでは省略し, 概略だけ説明しよう. 著者が「可解性ノート」と呼んでいる, このノートで, Hilbert は全ての数学の問題は解決可能だと主張した. Hilbert は, すべての数学の問題は, 非常に奇妙な「標準形」に還

ような徒に「懐疑的」な立場には与しないという意味である.

[13]しかし, たとえ IT の力を借りても, 歴史理解の最後のそしても最も重要な部分は, 歴史家の解釈にあることを強調しておきたい. 冷静なそして極力主観を排した徹底的な史料の「読み込み」と, そういう地を這うような作業によってのみ研ぎ澄まされていく「勘」に支えられた, 大胆かつ論理的な解釈こそが歴史学の核心であると, 著者は考えている.

[14]現代では計算代数の専門家でもない限り零点定理を Gordan 問題を構成的に解く道具として捉える人は少ないだろうが、Hilbert は 1897 年のゲッチンゲンにおける不変式論の講義で, この計算可能性への応用を中心として, 零点定理による Gordan 問題の第２の解を説明している (2010/03/18 変更).

元可能であり, しかも, その標準形は有限の操作で常にその真偽を決定することができると主張したのである. しかし, 同時に, 円積問題や「円周率 3.14…の中に 10 個の引き続く 7 が存在するか」という問題が, この主張への困難となるとも書いている. しかし, それでも, これ原理を仮定して前に進む, と Hilbert は書いたのである.

このノートは実に不思議なものと言わざるを得ない. Hilbert は Gödel の不完全性定理により, その計画が破綻した大数学者として説明されることが多く, 通俗的な解説などでは, 時代遅れの科学万能論者の大数学者が Gödel により打ち倒されたという風なニュアンスをもって説明されることも少なくない.

Hilbert が第一階算術の形式的完全性を主張し, それを彼の証明論が挑戦すべき open problem としていたことは確かである. しかしながら, Hilbert の Paris 講演などの哲学的議論を仔細に検討すれば, Hilbert は数学のすべての重要な問題が解けてしまう状況や, あいるは全て解けてしまわないまでも, 新たな問題が生じたとき, それが自動的に解けるという状況をまったく想定していなかったことがわかる.

たとえば, Paris 講演の哲学的議論の部分で, Hilbert は「一つの数学の問題が解ければ, その問題の代わりに, 多くの新しい問題が生まれる, 数学の問題は無尽蔵 (unermeßlich) である」という意味の発言をしている. Hilbert は, それを極めて肯定的に語っている. 常に新たな問題が存在する事は, Hilbert にとっては, 未来永劫フロンティアが枯れないことであり, Hilbert にとって数学とは, 常に新たな問題に挑戦し, それを解決するそのプロセスにあるからであろう. このことは Paris 講演の有名な次の一節が如実に物語っている: Da is das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!　Hilbert にとって重要なのは解けた問題ではなく, 問題を解くこと “suche die Lösung” なのである. Hilbert にとっては, 数学者が常に新しい問題に取り組み解決している状態こそが数学の健康な状態なのである. Hilbert はどの時点をとっても数学の問題が無くなるなどという「悲惨な事態」は考えていなかったはずである.

もし, 数学の問題を計算だけで自動的に解いてしまうような方法が存在したら, つまり, 数学問題の決定アルゴリズムが存在したらどうだろうか? この状況は, 未来永劫重要な数学の問題が尽きることが無いという Paris 講演の信念には抵触しないが, 数学の問題は自動的なルーチンワークとなる. あるいは, それはコンピュータに任せてしまった方が良いタスクなの

である.

Hilbert は, その様な状況を数学の「正しい姿」とは考えていなかった. その有力な証拠が, 1917 年のスイスでの講演をまとめた彼の論文 “Axiomatische Denken” [6] にある. この論文で, Hilbert は 4 次元代数曲面に関するある問題を検討し, それが巨大な代数計算で自動的に解けることを指摘したが, たとえ, そのような機械的計算により問題が解決されても, それは π の $10^{(10^{10})}$ 桁目を計算するような問題であり, そのような方法による「解」は, 「本当の解」とはいえないと主張した. そして, 実際には, この問題が Rohn による高度な代数幾何学的研究により解決されたことを指摘し, このような研究によってのみ, その問題は解決したと言えるとしたのである (pp.51-52, [6]).

この例は, Hilbert がこの時点で彼の公理論の大きな問題として捉えていた Entscheidung の問題, つまり数学の問題が有限の操作で決定できるかという問題の一例として検討されている.[15] つまり, Hilbert は機械的有限的操作により, 良い数学の問題が解けることに, 明らかに否定的な立場をとっているのである. もし, それが可能であっても, Hilbert にとって, そういう自動的機械的解決は, 本当の解決ではないのである.

この Axiomatische Denken に現れた Hilbert の数学思想は, 数学が計算のみに帰着できないということである. そして, これにこの時代より約 20 年前の Paris 講演の主張とをあわせれば, Hilbert は数学はどの時点でも完全でないし, また自動的に解決可能でもないと考えていたと結論するのがもっとも妥当だろう.

しかし, 同時に Hilbert が有名な標語 “kein ignorabimus” や “Wir müssen wissen, wir werden wissen” を主張したことは確かである. また, 第一階算術については完全性を証明すべき超数学の問題として提示している. また, 極く若い時期ではあるが, solvability note のように, 陽にそういう方法が存在するということを主張さえしている. この矛盾はどう解決されるのだろうか?

solvability note が無かったら, kein ignorabimus は単に数学者を奮い立たせるためのモットーに過ぎないと理解することも可能であろう. 算術の完全性を主張した Hilbert であるが, その問題を明瞭に提示した 1928 年の講演論文では高階においては, これは成り立たないかもしれないという意味にとれる発言をしている. Hilbert は, 数学の一部では自動的な問

[15] 現代でいう決定問題 Entscheidungsproblem ではない. この用語は 1920 年代になって, Hilbert の学生 Behmann により定義されたものである.

題解決を許容し, 数学一般にはそれを否定したと考えられないこともないのである.

しかしながら, すくなくとも, solvability note の時代には, Hilbert はそう考えていなかった. solvability note はあらゆる数学の問題が normal form に還元され, かつその標準形は必ず有限的操作で決定できるとしたのである. 数学の全ての問題を解くアルゴリズムの存在を信じながら, 同時に数学がトリビアルな学問でなく, 計算だけで解決できないような問題が永遠に入れ替わり立ち代り現れると信じるというのは, どういうことなのだろうか? あるいは, Hilbert は, 時代時代により考え方を変えて行ったのだろうか.

この問題を解く有力な手がかりが, 彼の日記と, Ackermann との共著書 "Grundzüge der theoretischen Logik" の第一版にある. これを次に説明しよう.

2.3 「有限」の無限性

Hilbert の不変式論研究は Kronecker の一般算術に強く影響されていたことが知られている. しかし, 後には Kronecker の無理数論批判を強く逆批判したことでも知られる. 橋本雄太によれば, Kronecker への反論の最も古いものが, 数学ノート第 1 冊 8 頁にある [19]. その内容は, 大よそ次のようなものである (直訳ではなく, 著者の解釈が入っている. 原文と翻刻については [3], [19] を参照して欲しい)：

> 我々が厳密に扱うことができる数は正整数だけに過ぎない. (多分, 1 $\cdots$ 5 程度多くとも 7 までだけ. [著者注. このカッコ内の部分は追加された文だが, その内容は不明瞭]) 1/2 という有理数でさえ, 線分の本当の中点は我々は (誤差のために) 示すことができないのだから仮想的なものに過ぎない. つまり有理数さえ仮想的なのだから, 有理数は認めるが無理数は認めないというのは可笑しい. 無理数まで認めればよい. Kronecker は根拠のない理由で数学に針の穴を通り抜けるような制限を置こうとするが, 上のように考えることは, 我々を広々と明け放たれた多くの出口のある道に導く.

これを Hilbert が書いたころは, おそらく 1886, 7 年ころと思われるが, このころの Hilbert は実数を幾何学的に把握していたらしい ([19] 参照). そ

の幾何学的な実数の存在論からすると, たとえ 1/2 という有理数さえ, 幾何学的に「線分を半分」に分けるという行為の誤差ゆえに絶対的なものと言えない. そうならば無理数と有理数の間に (Kronecker のように）線を引く根拠はないのではないか, だから有理数を認めるならば無理数も認めよ, というのが, この議論である.

実数を幾何学的量として把握するという「旧いアプローチ」を取っていることが目を引くが, Hilbert の実数論の変遷については [19] に譲るとして, ここでは人間の「限界的可能性」についての Hilbert の議論の方に注目しよう. 理念上は有限的で人間が直接に取り扱えるとされるが, 実際には誤差などの「現実的」問題により, 人間が取り扱うことができないものは, 無限性という理念の問題で人間には取り扱えないとされる無理数と同じく仮想的なものだという立場を Hilbert がとっていることに注目して欲しい. Hilbert は人間や数学などの限界性の理論的側面より現実的側面に注目しているのである. これは後に Herbert Simon が提唱した bounded rationality の考え方に通じる議論であるが, 真に注目すべきは, Hilbert が, この現実的限界性を逆手にとって, 無理数論の擁護に使っている点である.

Kronecker たちは, 人間が操作できる数式などの「地上的」有限的存在のみを数学の対象として許そうとした. そして, その結果として「天上的」無限は数学から排除されることとなる. これは一種の懐疑論である.

ところが, Hilbert は, この懐疑論が許容する「人間が操作できる地上的有限性」自体が無限と同じように「地上ものではない」とするのである. 確かに原理的には, 5 までの数と数十兆の数十兆乗のような巨大な数には違いはないかもしれない. また, 1/2 という数にあたる線分の点はコンパスと定規で作図可能で, その精度は幾らでも向上できるのかもしれない. しかし, 現実のそれぞれの時点では, 絶対の精度は達成できない.

Kronecker たちの「原理として人間に実行可能」という線引きから,「現実に人間に実行可能」という線引きに変えれば, 有理数さえ「天上界」にあることになる. もし, 有理数を許容するのならば, その有理数が存在している「天上界」を無理数概念ごと許容してしまっておかしくはない. つまり, 天上界と地上を分ける境界線を, 有理数の位置を利用して, うんと上に押し上げてしまうことにより, 天上界と地上界の間の線引きの意味をなくしてしまう, Hilbert は, そういう論理を使っていると考えられる.

その後, Hilbert は実数を Dedekind や Cantor の集合論的方法で理解するようになり,「1/2 = 線分の半分」という議論はなくなる [19]. また,

引き上げた境界線の下, 集合の世界が実際にアンチノミーで崩壊してしまい, 「天上界としての無限」と「地上界としての有限」の境界線の上向きの移動は Kronecker のような批判を免れなくなってしまった.

しかし, 有限を「理想的有限」と「現実的有限」に切り分ける, 境界線移動の戦略を Hilbert は, その後も保持し続けたと思われる証拠が複数存在する. たとえば, 先に検討した Axiomatisches Denken の Rohn の研究を巡る議論もその一つなのであるが, もっとも典型的なのは, 1928 年の Hilbert-Ackermann の論理学のテキストの第一版における述語論理の決定問題についての議論であろう.[16] この小冊子で, Hilbert は現代の言葉で言えば, 第一階の述語論理の決定問題を論理学の重要な未解決問題として提出した. 彼の残した数学の基礎や論理学についての講義ノートからすると, これは若き日の可解性原理追求の線上にある問題だったらしい. Hilbert は, それが肯定的に解決されると信じていた. しかし, この小冊子の p.74 で, 彼は次のような意味の議論を行ったのである.

> 述語論理学の決定方法は存在するが, それが数学に実際的な意味を持つと考えるのは幻想である. そういうアルゴリズムは存在するが, その操作の複雑さ故に, 現実には実行が不可能なはずだからである.

もし, Hilbert が現代に生きていたら, これを「述語論理学の決定方法は存在するが, それは NP 問題であるので feasible でないはずだ」と言ったかもしれない. もちろん, NP 問題という概念は, Hilbert 没後のものだから, 彼がこういう発言をすることはなかったし, 第一, Turing も登場していない時代に, 計算の複雑度について Hilbert が議論していたということは俄かには信じがたいかもしれない.

しかし, Hilbert が原始的ながら計算の複雑度について考えていた証拠は存在する. 数学手帳の 2 冊目の 3 ページには「計算の理論を打ちたてよ」というノートがあり, n の階乗計算に必要な計算の最小ステップ数を求めるという問題を例として考えている.

実は Hilbert にとって計算の複雑性の問題は, 数学における原体験というべきものだったのである. 1886/7 の冬学期, Königsberg 大学の私講師 Hilbert は代数的不変式についての講義を行った. そして, 彼が 1890 年の論文で有限基底定理により解決することになる, 所謂「Gordan 問題」について言及した. この当時, この問題への解答としては, 20 年ほど前に得

[16] この議論は, Hilbert の講義録にはかなり以前から存在する. また, おそらく Gödel の結果の影響と思われるが, [5] の後の版では, この議論が削除されている.

られた Paul Gordan による 2 変数不変式の場合に限る解法アルゴリズムが知られていた.[17] しかし, Hilbert は, ゴルダンの方法は複雑過ぎて殆どの場合に実行できないことを指摘し, 問題の核心はそういう計算方法でなく, 存在するという事実を示すことだけだ, と書いたのである.[18] この「転回」が, 彼を有限基底定理による Gordan 問題の解決に導き, やがてそれが 20 世紀抽象代数学へと結実する.

Hilbert 遺稿集には, Hilbert が彼の博士論文のために作った緻密な, しかし退屈な数式表が残されている. 彼は, 数学ノートのあちこちで, 計算が数学の本質でないことを繰り返し書いている. それは計算に恨みがあったとしか思えないほどの執拗さで繰り返されているのである.

ここまで書けば, 賢明な読者には, あらゆる数学の問題が計算で解決できるという Hilbert の可解性原理が, 数学の問題は枯渇せず, 常に (計算ではない) 数学的熟考によって解かれていくという思想が全く矛盾しないことがお分かりいただけたものと思う. Hilbert にとって, 可解性は「数学の栄光」を証明するための哲学的とでもいうべき原理であったが, それは現実に数学が計算だけで解けるという主張ではないのである. つまり, Hilbert は巨大な有限の中に無限を見出すという逆説的な思想により, この二つが矛盾しないと考えることができたのである.

3 結論

今回は「可解性と計算」を中心に「新しい Hilbert 像」を説明したが, 数学ノートからは, これらの他にも, 公理論のオリジンや, 幾何学の公理論と物理の公理論の関係を示すノートなど, 我々の従来の「常識」を覆すに足る多くのノートが発見されている. しかし, 現在まで, 我々はノートのほんの一部を解読できたに過ぎない. 研究が進展していくに従い, Hilbert のイメージはさらに変化していくことだろう.

参考文献

[1] Blumenthal, Von Otto: *Lebensgeschichte*, in Vol. 3 of “David Hilbert, Gesammelte Abhandlungen”, Springer-Verlag, 1970.

[17] 小さな改善は数多く知られており, Hilbert 自身もそういう貢献をしている.
[18] Hilber 遺稿集, Cod. Ms. Hilbert 521, pp.192-194.

[2] Corry, Leo: *David Hilbert And The Axiomatization Of Physics 1898-1918: From Grundlagen Der Geometrie To Grundlagen Der Physik*, Springer, 2004.

[3] Hayashi, S. et al.: David Hilbert's Early Foundational Thoughts, in preparation.

[4] Hallet, M. and Majer, U. eds.: *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*, Springer-Verlag, 2004.

[5] Hilbert, D. and Ackermann, W.: *Grundzüge der theoretischen Logik,* Springer, 1928.

[6] Hilbert, D.: *Aximatisches Denken*, Mathematische Annalen, Bd. 78, pp.405-415, 1918.

[7] Laugwitz, Detlef: *Bernhard Riemann 1826–1866, Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, 1996, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin; English translation, Bernhard Riemann 1826–1866, Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik, 1996, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin; English version translated by Abe Shenitzer, *Bernhard Riemann 1826-1866, Turing Points in the Conception of Mathematics*, 1999, Birkhäuser.

[8] D. Hilbert, *Über die Theorie der algebraische Formen*, Mathematische Annalen 36, 473-531.

[9] Hibert, David: *Theorie der algbebraischen Invarianten*, lecture notes of Hilbert's courses of 1897 summer semester at Göttingen university handwritten by Sophus Marxsen. Three practically identical copies exist. Two are kept in the library of Math. Instiute of Göttingen university. One is kept in the library of department of mathematics, Cornell univerity. The last one is translated into English by R. C. Launbenbacher and published as Hibert, David: *Theory of Algebraic Invariants*, Cambridge Mathematical Library, 1993.

[10] D. Hilbert, translated by M. Ackerman, *Hilbert's Invariant Theory Papers*, Math. Sci. Press, 1978.

[11] Majer, Ulrich: "Hilbert's Axiomatic Approach to the Foundations of Science: A Failed Research Program?" in *Interactions Mathematics, Physics and Philosophy, 1860-1930* V. F. Hendricks, et al. eds, Springer, 2006.

[12] Toepell, M.: Über die Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie". (Dissertation 1984). Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen 1986. XIV + 293 Seiten. (Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik. Bd.2)

[13] Reid, Constance: *Hilbert*, Copernicus, An Imprint of Springer-Verlag, New York, 1996

[14] Rowe, David E.: Making Mathematics in an Oral Culture: Göttingen in the Era of Klein and Hilbert, Science in Context, 17(1/2), 85-129, 2004.

[15] Hayashi, S.:Web site, Hilbert mathematical notebooks, ~~http://www.shayashi.jp/HistorySociology/HistoryOfFOM/HilbertNotebookProjectHomepage/index.html~~
https://shayashiyasugi.com/wwwshayashijp/HistoryOfFOM/HilbertNotebookProjectHomepage/index.html

[16] Thiele, Rudiger: Hilbert's twenty-fourth problem American Mathematical Monthly, Jan. 2003.

[17] Hayashi, S.: Web site, SMART-GS: a tool for humanistic studies, ~~http://www.shayashi.jp/SMART-GS/~~ https://ja.osdn.net/projects/smart-gs/

[18] 林晋, 八杉満利子, 岩波文庫「ゲーデル著　不完全性定理」の解説, 岩波書店, 2006.

[19] 橋本雄太, **David Hilbert の実数論**, 京都大学文学部, 基礎現代文化学系, 情報・史料学専修 2007 年度卒業論文, 2008 年 2 月.