数学基礎論
知の階層

林 晋
◉京都大学名誉教授

GOLEMのパラドックスについては，数百もの様々な解釈が存在する，現存する最大の数学者の一人，T.ヴレーデルによれば，GOLEMのパラドックスとは，それがGOLEMにとってはパラドックスではなく，ただ人間にとってのみパラドックスであるということだという．これは，認識活動を行う主体の知的能力に対して相対化されて(関連づけられて)発見された最初のパラドックスの一つである．

スタニスワフ・レム著，沼野充義訳「ヴェストランド・エクステロペディア」(『虚数』(国書刊行会，1998)所収)

＊　＊　＊

1……ホーキング，ゲーデルを語る

2002年7月20日，物理学者ディラック生誕100年を祝いケンブリッジ大学でいくつかの公開講演が行われた．その一つ「ゲーデルと物理学の終」の講演者は同大学教授スティーヴン・ホーキングであった．2020年のノーベル物理学賞はロジャー・ペンローズなどのブラックホール研究に与えられたが，生きていれば授賞式の壇上にいたはずのあの車椅子の物理学者である．

ホーキングが言う「物理学の終」とは，物理学が進歩して現象のすべてを説明できる「万物の理論」が完成すれば，それは終着点にたどりついたことであり，研究分野として終わってしまうだろう，ということであった．そして，もう一つの「ゲーデル」は，本稿のテーマである不完全性定理を発見した数学者クルト・ゲーデルである．

クルト・ゲーデル

ホーキングにはポピュラーサイエンスの大ベストセラー『ホーキング，宇宙を語る』があるが，彼は1988年に出版されたこの著書で，物理学者は万物の理論を追い求めているが，それは不可能なのかもしれないと書いている．物理学者も万物の一つなので，その思考は万物の理論の法則に支配される．そして，そのゆえに「物理学者は万物の理論に到達できない」とその法則で運命づけられているかもしれないというのである．

この万物の理論の不可能性についての議論が不完全性定理の仕組みに似ている．ホーキングは1988年の著書ではそれを語らなかったが，2002年の講演では不完全性定理の証明の粗筋を解説した上で，この二つを結びつけた．このホーキングの解説が物理とのアナロジーもあってわかり易い．歴史的経緯などを補足しつつ，ホーキングにならって不完全性定理を説明してみよう．

2……ペアノ算術：自然数の万物の理論

ホーキングによれば物理学者が追い求めている万物の理論とは，有限個の数式で物理世界のすべてを説明できるものである．一般相対性理論の宇宙方程式は宇宙における重力のあり方を説明できる．しかし，量子力学が記述する微細世界の現象は説明できない．一方で量子力学では重力についての現象を説明できない．両者はこの意味で不完全である．それどころか，一般相対性理論と量子力学の世界観は矛盾さえしている．そこでこの二つを統一する矛盾がなく完全な「大統一理論」が追い求められている．その別名が「万物の理論」なのである．万物の理論とは言ってもその対象は一般相対性理論や量子力学などの対象である．

物理学者が物理世界の無矛盾(矛盾がないこと)で完全な理論を追い求めるように，数学者は代数や幾何の世界の無矛盾で完全な理論を追い求める．数学の対象で一番基本的なものといえば自然数だろう．19世紀終わりから20世紀の最初にかけて，数学者たちは「自然数の万物の理論」とでもいうものを追い求めた．つまり，自然数の性質を無矛盾かつ完全に説明できる理論である．ただし，数学の話なので，説明というのは「数学の命題の真偽を証明で導ける」ということである．

それはホーキングがいう「物理の万物の理論」と同じく，有限個の「式」，この場合は公理と呼ばれる証明の出発点となる命題からできていなければならないとされた．対象が自然数であるだけに，これらの公理は誰もが知っているような簡単な命題だった．たとえば，「$a+1=b+1$ ならば $a=b$ である」や数学的帰納法などである．この「自然数の万物の理論」は専門用語で「1階算術」というが，イタリアの数学者ジュゼッペ・ペアノにちなんで「ペアノ算術」と呼ばれることが多い．

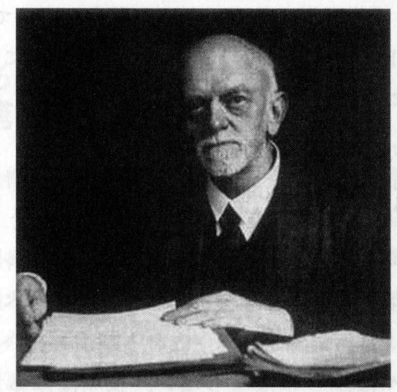
物理学者は完全で無矛盾な万物の理論を追い求める．ただし，完全と言っても物理学者が知りたいと思うことを説明できれば良いのであって，本当に何でもかでもということではない．ビッグバン以前の量子力学的な「極小宇宙」を理解できたりすれば良いのであって，「2050年1月1日午前零時の富士山頂の気温」は予想できなくてもよい．また，無矛盾と言っても，それは現状の一般相対性理論と量子力学の矛盾的関係が解消されることであり，万物の理論が未来永劫絶対に矛盾しないということを，たとえば数学的に証明したいという話ではない．

物理学者が理解したいのは物理世界である．一方物理学の理論そのものは物理的な「もの」でさえない．そういう非物理的なものの性質を数学的に証明するということは多くの物理学者の興味ではないだろう．

ところが数学の場合は違った．ペアノ算術が無矛盾で完全であることを証明しようとした数学者がいたのである．しかも，それは数学界を代表する人だったのである．

3……ヒルベルト計画

19世紀終わりから20世紀初めに活躍したドイツの数学者ダーヴィット・ヒルベルトは，公理論という新手法で数学界を牽引し，それが20世紀抽象数学の誕生と隆盛につながった．1900年には「数学の問題」という講演で，20世紀の数学者が挑戦すべき23の問題を提案して数学の進むべき道を示した．ヒルベルトは20世紀数学のリーダーだったのであ



ダーヴィット・ヒルベルト

る.

ヒルベルトは物理学の研究にも取り組み，アルベルト・アインシュタインは一般相対性理論研究の時期，ヒルベルトをライバルとみなした．歴史家の中にはヒルベルトの方が先に宇宙方程式を発見していたと言う人さえいる．

1915年にアインシュタインが一般相対性理論を完成させた後，ヒルベルトは物理学の研究を止め，「ヒルベルト計画」というプロジェクトに専念した．ヒルベルトの23の数学の問題の2番目の問題は「算術の無矛盾性の証明」であるが，ヒルベルト計画はこの第2問題やそれに関連する問題を数学で解こうというプロジェクトで，そのうち「算術」などの無矛盾性と完全性の証明が最重要課題だった．

第2問題の「算術」は古い言葉づかいで実数の理論のことである．実数の理論は2階算術という自然数と自然数の集合の理論と同じであることがわかり，ペアノ算術がこの理論の部分理論なので，まずはペアノ算術が無矛盾で完全であることを示すサブプロジェクトが立てられた．このサブプロジェクトは当時の若く優秀な数学者たちの関心を引き，たとえばジョン・フォン・ノイマンもこの計画に参加し，1928年にペアノ算術のさらに部分となる理論の無矛盾性を証明する論文を出版している．

ただ，ノイマンは完全性については懐疑的だった．彼はこの論文で「ペアノ算術のような理論が完全ならば数学の問題が計算問題にすぎなくなってしまう」と，「物理学の終」のような懸念を書いている．数学がトリビアルになる，それはノイマンには信じがたいことだった．そして，ノイマンは正しかった．

4……ゲーデルの登場：第1不完全性定理

1930年，ヒルベルトの生地ケーニヒスベルクでドイツ科学界の大きな学会が開かれた．ヒルベルトも参加し「自然認識と論理」という講演を行い，それを「我々は知らねばならない．我々は知るであろう」と結んだ．これは彼の墓碑銘でもある有名な言葉だが，その意はヒルベルト計画の目標「数学者は数学の万物の理論に到達できる．そして，到達できたことを証明できる」ということだったであろう．

この同じ学会で数学の基礎付けについてのシンポジウムがあり，ノイマンがヒルベルトの代理のような立場で講演を行った．そして第2部のパネルディスカッションの最中，ある若者が「正しいが数学の理論では証明できない命題が存在する」と発言した．つまり，数学の理論は完全ではないというのである．

これがゲーデルだった．彼はこの年ウィーン大学で学位を得て，その博士論文の成果を発表するためにこの学会に来ていたのである．ノイマンは自らの懸念がこの新人数学者により証明されたことに驚き，シンポジウム後にゲーデルに根掘り葉掘り聞いたと言われる．ゲーデルが証明したこと，それは第1不完全性定理と呼ばれるものである．これをホーキングは次のように説明した．

ゲーデルは，第1不完全性定理を，自己参照命題で証明した．自己参照命題とは「この文は偽である」のように，それ自身について語る命題である．この文が真ならば，この文は偽となり，この文が偽ならば，この文は真となり…と推論のループが起きる．背理法を使うと，このループから，この文は真でもあり偽でもあることを示せる．

自己参照命題はこのようにパラドックスを導くことがある．不完全性定理が有名になったのは1979年に出版された『ゲーデル，エッシャー，バッハ——あるいは不思議の環』によってだが，著者ダグラス・ホフスタッターが「自己参照の不思議」を強調したので，一時，自己参照 ＝ パラドックスという誤解が蔓延した．しかし，自己参照はITの世界では当たり前の現象で時に有用でもある．ゲーデルの場合もそれは不完全性定理を証明するために有用だったのである．

ゲーデルは，2+2 ＝ 4のような数学の命題と，「数学は無矛盾だ」というような超数学の命題，つまり，数学についての命題を慎重に区別しながら自己参照する数学の命題を作り上げた．そのためにゲーデルは2+2 ＝ 4のような数学の命題に番号付けを行った．これをゲーデル数と言うが，現代からすればテキストのコード化である．ゲーデルの方法とは異なるが，2+2 ＝ 4の「ゲーデル数」を計算してみよう．Windowsで使われるSJISというコード方式では，2, +, 2, =, 4の文字コードは，16進法で32, 2b, 32, 3d, 34である．2+2 ＝ 4のコードあるいはゲーデル数とは，これら5個の文字コードを並べた322b323d34という一つの16進数である．

ゲーデルは，このゲーデル数を使い，超数学の命題が自然数論の命題に翻訳できることを示した．つまり，「2階算術は無矛盾である」とか「ペアノ算術は完全である」とかの命題が，自然数とその演算である和と積を使う命題に翻訳できることを示したのである．さらに，ゲーデルは，ペアノ算術や2階算術などの数学の理論Tのそれぞれに対して「GはTでは証明できない」という内容を持つ自己参照する命題Gを作れることを示した．

このGがTで証明できたとしよう．ゲーデルは，Tがペアノ算術を部分理論とする理論である場合には，超数学の命題「GはTで証明できる」が正しいならば，その翻訳がTで証明できることを証明して見せた．ところがGは，この命題の否定「GはTでは証明できない」を表すから，Tで「GはTで証明できる」とその否定「GはTでは証明できない」の両方(の翻訳)が証明できることになり，Tは矛盾する．よって，Tが無矛盾ならばGはTでは証明できない．しかし，そのときGは正しいことになるから，Gは正しいがTでは証明できない命題となる．つまり，Tは無矛盾ならば不完全である．以上をまとめれば「ペアノ算術を部分理論とする数学の理論は無矛盾であるならば不完全である」となる．これを第1不完全性定理という．

5……算術的階層：第1不完全性定理の数学的本質

エヴァリスト・ガロワが5次以上の方程式が代数的解を持たないことを証明して以来，その証明の本質が深究され群論と体論を基礎とする現代の整然としたガロワ理論ができた．ゲーデルの第1不完全性定理の証明は，ホーキングも言っているように複雑でわかりにくいものだったが，それは言ってみればガロワのブレークスルーに相当し，その後の研究で算術的階層の理論というガロワ理論にあたる理解しやすいものが整備された．

自然数変数 x_0, x_1 と，その値をアルゴリズムで計算できる自然数値関数 $f(x_0, x_1)$ で，

$$\{x_0 \mid f(x_0, x_1) = 0 \text{ となる } x_1 \text{ が存在する}\}$$

と定義できる集合を Σ^0_1 集合という．一方で，

$$\{x_0 \mid \text{すべての } x_1 \text{ に対して } f(x_0, x_1) = 0 \text{ が成り立つ}\}$$

と定義できる集合を Π^0_1 集合という．第1不完全性定理の数学的本質は，Σ^0_1 集合になりえない Π^0_1 集合が存在するということである．

Σ^0_1 集合は

$$\{x_0 \mid \text{「すべての } x_2 \text{ に対して } f(x_0, x_1, x_2) = 0\text{」となる } x_1 \text{ が存在する}\}$$

と定義される Σ^0_2 集合に拡張できる．そして同様に，$\Pi^0_2, \Sigma^0_3, \Pi^0_3, \cdots$ と無限に上に伸びる2系列の階層 Σ, Π が定義できる．第1不完全性定理の本質は，これらが横にも縦にも潰れないこと，つまり，横の Σ^0_n と Π^0_n は他方に還元されることはなく，上の層の Π^0_{n+1} や Σ^0_{n+1} が下の Σ^0_n や Π^0_n に還元されることもないという事実なのである．現代の目から見れば，ノイマンの危惧とは，完全性が成り立つと算術的階層が潰れてフラットになってしまうということだったのである．

6……もう一つの階層：第2不完全性定理

完全性の証明の夢はついえた．では，無矛盾性の方はどうだろう．ゲーデルは彼の第1不完全性定理の証明自身が，定理の対象である「ペアノ算術を部分理論とする数学の理論」の中に翻訳できることを発見した．そして，そのことを使うと，もしそのような理論Tが無矛盾であれば「Tは無矛盾である」という命題はTでは証明できないことがわかるの

である．つまり，Tは自分自身の無矛盾性を証明できない．これを第2不完全性定理という．

ヒルベルトの計画では，無矛盾性はヒルベルトが「有限の立場」と呼んだ「ペアノ算術のごく小さい一部分」のみを使って証明することになっていた．万物の理論が物理学者の思考を妨げてその発見を妨害する可能性があるのなら，思考を捻じ曲げて間違えた理論を発見させてしまう可能性さえある．同様に，T自身でTの無矛盾性を証明できたとしても，Tが実は矛盾していて，そのために誤った結論が証明できたのかもしれない．そのためペアノ算術よりさらに信用度が高い小さな理論を使って無矛盾性証明を行おうとしたのである．

つまり，一番小さなもので，どんなに大きなものもカバーできる，無矛盾性について言えば階層はないという構図である．しかし，ここでも階層は潰れなかったのである．

7……輪廻の根：デュ・ボア・レーモン

不完全性定理でヒルベルトの夢はついえた．しかし，このような大数学者が現代の目から見ればSFチックにさえ見える計画を立てた理由は何なのだろうか．無矛盾性について言えば，ゲオルク・カントルの集合論に由来する「数学の危機」という歴史的背景があることは衆知である．

もう一方の，現代から見れば「トンデモ」にさえ見える完全性の方は，実はドイツの生理学者エミール・デュ・ボア・レーモンの不可知論に由来する．この忘れられた巨人は，エネルギー保存則で知られる友人ヘルマン・フォン・ヘルムホルツとともに19世紀の生理学の物理学化に大きな貢献をした人で，ベルリン大学長をつとめるなど大きな社会的影響力も持った人であった．

相対論や量子力学以前，多くの科学者はニュートン力学などの古典物理学という「万物の理論」を手にしていると考えた．それを使えばデュ・ボアレーモンがやって見せたように動物の神経の働きさえ解明できる．フランスの学者ピエール=シモン・ラ

デュ・ボア・レーモン

プラスが言ったように「現在の物理状況のすべてのデータを集める能力さえあれば，未来は完全に予測できる」と信じたのである．そういうことができる存在は「ラプラスの悪魔」と呼ばれている．

この「ラプラスの悪魔」という言葉の由来がデュ・ボア・レーモンの不可知論だったと言われる（彼は「ラプラスのガイスト（精神，霊）」と呼んだ）．興味深いことに彼はこの「ラプラスの悪魔」のたとえを縦横に使って，逆に人類の知の限界を説いたのである．その哲学的議論はここでは紹介できないが，実はホーキングが1988年の著書で，それに似た議論をしている．ホーキングによればラプラスの悪魔には二つの不完全性がある．一つには悪魔が世界理解に使う法則が，なぜこの世界の法則として選ばれたのか，その法則自体では説明できない．自己参照になるからである．また，宇宙の歴史を知るために悪魔は宇宙の初期状態を知らねばならないが，現状のデータを集めることができるだけの悪魔にその能力はない．時間という階層をラプラスの悪魔は潰せないのである．

実は19世紀には，現代ならば哲学者でないと行わないような議論や研究が科学者や数学者により行われていたのである．たとえばヘルムホルツは彼の物理学的生理学を使ってカント哲学の真偽を研究しようとした．そして，デュ・ボア・レーモンは逆に哲学的議論で自然科学の限界を説いた．さらに，その不可知論のモットーが「我々は知らない．我々は知らないであろう」だったのである．

若き日のヒルベルトはこの不可知論に強い敵意を持ち，少なくとも数学ではそういうことは起きないということを数学で証明するという計画を立て，それが後にヒルベルト計画となったのである．実は彼の物理学研究のルーツも，物理学をさまざまに公理化して，そのうちで最善の理論が現在の物理学理論に一致することを示すという野望にあった．

デュ・ボア・レーモンの万物の理論についての不可知論への反発がヒルベルト計画を生み，そして，それがデュ・ボア・レーモンの議論にどこか似たゲーデルの議論で否定されてしまった．何か輪廻・因果応報を感じさせるような話である．

ホーキングは2002年の講演で，不完全性は悪いことではない，それは数学者が永遠に失業しないことの証拠であるとした．そして，やはり講演者であったエドワード・ウィッテンのM理論を引き合いに出し，それが不完全性定理のように物理学者も失業しないと証明してくれるのではないかと期待していると講演を結んだ．ゲーデル自身もそう考えていたのだが，不完全とは永遠に挑戦を続けることができるということでもある．

［はやし すすむ］