Ueber die Theorie der algebraischen Formen*).

Von

David Hilbert in Königsberg.

Inhalt:

I.

Die Endlichkeit der Formen in einem beliebigen Formensysteme.

Unter einer algebraischen Form verstehen wir in üblicher Weise eine ganze rationale homogene Function von gewissen Veränderlichen und die Coefficienten der Form denken wir uns als Zahlen eines bestimmten Rationalitätsbereiches. Ist dann durch irgend ein Gesetz ein System von unbegrenzt vielen Formen von beliebigen Ordnungen in den Veränderlichen vorgelegt, so entsteht die Frage, ob es stets möglich ist, aus diesem Formensysteme eine endliche Zahl von Formen derart auszuwählen, dass jede andere Form des Systems durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann, d. h. ob eine jede Form des Systems sich in die Gestalt

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

bringen lässt, wo $F_1, F_2, \ldots, F_m$ bestimmt ausgewählte Formen des gegebenen Systems und $A_1, A_2, \ldots, A_m$ irgendwelche, dem nämlichen Rationalitätsbereiche angehörige Formen der Veränderlichen sind. Um diese Frage zu entscheiden, beweisen wir zunächst das folgende für unsere weiteren Untersuchungen grundlegende Theorem:

*) Vgl. die vorläufigen Mittheilungen des Verfassers: „Zur Theorie der algebraischen Gebilde“, Nachrichten v. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1888 (erste Note) und 1889 (zweite und dritte Note).

Theorem I. *Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt, etwa $F_1, F_2, F_3, \ldots$, so giebt es stets eine Zahl m von der Art, dass eine jede Form jener Reihe sich in die Gestalt*

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

bringen lässt, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ geeignete Formen der nämlichen n Veränderlichen sind.

Die Ordnungen der einzelnen Formen der vorgelegten Reihe sowie ihre Coefficienten unterliegen keinerlei Beschränkungen. Denken wir uns die letzteren als Zahlen eines bestimmten Rationalitätsbereiches, so dürfen wir annehmen, dass die Coefficienten der Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ dem nämlichen Rationalitätsbereiche angehören. Was die Ordnungen der Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ betrifft, so müssen dieselben jedenfalls der Bedingung genügen, dass der mit Hülfe dieser Formen gebildete Ausdruck

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

wieder eine homogene Function der n Veränderlichen darstellt und es sei hier zugleich auch für die ferneren Entwickelungen bemerkt, dass in allen Fällen, wo es sich um eine additive Vereinigung oder lineare Combination mehrerer Formen handelt, die Ordnungen der Formen so zu wählen sind, dass die Homogenität der entstehenden Ausdrücke gewahrt bleibt.

In dem einfachsten Falle $n = 1$ besteht eine jede Form der vorgelegten Reihe nur aus einem einzigen Gliede von der Gestalt cx^r, wo c eine Constante bedeutet. Es sei in der vorgelegten Reihe $c_1 x^{r_1}$ die erste Form, für welche der Coefficient c_1 von Null verschieden ist. Wir suchen nun die nächste auf diese Form folgende Form der Reihe, deren Ordnung kleiner ist als r_1; diese Form sei $c_2 x^{r_2}$ und es ist dann wiederum die nächste auf letztere Form folgende Form der Reihe zu bestimmen, deren Ordnung kleiner ist als r_2; diese Form sei $c_3 x^{r_3}$. Fahren wir in solcher Weise fort, so gelangen wir jedenfalls spätestens nach r_1 Schritten zu einer Form F_m der vorgelegten Reihe, auf welche keine Form von niederer Ordnung mehr folgt und da mithin eine jede Form der Reihe durch diese Form F_m theilbar ist, so ist m eine Zahl von der Beschaffenheit, wie sie unser Theorem verlangt.

Auch für den Fall $n = 2$ lässt sich unser Theorem I. auf entsprechendem Wege ohne Schwierigkeit beweisen. Es genüge die folgende kurze Andeutung dieses Beweises. Wenn die binären Formen der vorgelegten Formenreihe sämmtlich die nämliche binäre Form als gemeinsamen Factor enthalten, so schaffen wir zunächst diesen Factor durch Division fort. Es ist sodann stets möglich, aus den Formen der erhaltenen Reihe durch lineare Combination zwei binäre Formen

G und H zu bilden, welche keinen gemeinsamen Factor besitzen. Ist dies geschehen, so lässt sich jede beliebige binäre Form F, deren Ordnung nicht kleiner ist als die Summe r der Ordnungen der Formen G und H in die Gestalt

$$F = AG + BH$$

bringen, wo A und B geeignet zu bestimmende Formen sind. Im Besonderen ist daher auch jede in der Reihe enthaltene Form, deren Ordnung die Zahl r erreicht oder übersteigt, einer linearen Combination der Formen G und H gleich. Was endlich die Formen der Reihe anbetrifft, deren Ordnungen kleiner als die Zahl r sind, so kann man unter diesen jedenfalls eine endliche Anzahl derart auswählen, dass alle anderen Formen der Reihe linearen Combinationen der ausgewählten Formen gleich sind.

Will man in ähnlicher Weise unser Theorem I. für den Fall ternärer Formen beweisen, so würde vor Allem der Noether'sche Fundamentalsatz*) von den Bedingungen der Darstellbarkeit einer ternären Form durch zwei gegebene Formen anzuwenden sein und hierbei wäre dann eine sorgfältige Untersuchung aller möglichen Ausartungen des durch Nullsetzen der beiden gegebenen Formen definirten Werthesystems erforderlich. Da die durch diesen Umstand bedingten Schwierigkeiten mit der Zahl n der Veränderlichen immer stärker zunehmen, so schlagen wir zum Beweise des Theorems einen anderen Weg ein, indem wir allgemein zeigen, wie sich der Fall der Formen von n Veränderlichen auf den Fall von $n-1$ Veränderlichen zurückführen lässt.

Es sei $F_1, F_2, F_3, \ldots$ die gegebene Reihe von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und F_1 sei eine nicht identisch verschwindende Form von der Ordnung r. Wir bestimmen dann zunächst eine lineare Substitution der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche eine von Null verschiedene Determinante besitzt und ausserdem die Form F_1 in eine Form G_1 der Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ derart überführt, dass der Coefficient von y_n^r in der Form G_1 einen von Null verschiedenen Werth annimmt. Vermöge der nämlichen linearen Substitution mögen die Formen $F_2, F_3, \ldots$ beziehungsweise in $G_2, G_3, \ldots$ übergehen. Betrachten wir nun eine Relation von der Gestalt

$$G_s = B_1 G_1 + B_2 G_2 + \cdots + B_m G_m,$$

wo s irgend einen Index bezeichnet und $B_1, B_2, \ldots, B_m$ Formen der Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sind, so geht dieselbe vermöge der umgekehrten linearen Substitution in eine Relation von der Gestalt

---

*) Vgl. M. Noether, Math. Ann. Bd. 6 und 30, sowie A. Voss, Math. Ann. Bd. 27 und L. Stickelberger, Math. Ann. Bd. 30.

$$F_s = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

über, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Formen der ursprünglichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Es folgt daher unser Theorem I. für die ursprünglich vorgelegte Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$, sobald der Beweis des Theorems für die Formenreihe $G_1, G_2, G_3, \ldots$ gelungen ist.

Da der Coefficient von y_n^r in G_1 einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so lässt sich der Grad einer jeden Form G_s der gegebenen Reihe in Bezug auf die Veränderliche y_n dadurch unter die Zahl r herabdrücken, dass man G_1 mit einer geeigneten Form B_s multiplicirt und das erhaltene Product von G_s subtrahirt. Wir setzen dementsprechend für beliebige Indices s

$$G_s = B_s G_1 + g_{s1} y_n^{r-1} + g_{s2} y_n^{r-2} + \cdots + g_{sr},$$

wo B_s eine Form der n Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ist, während die Formen $g_{s1}, g_{s2}, \ldots, g_{sr}$ nur die $n-1$ Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ enthalten.

Wir nehmen nun an, dass unser Theorem I. für Reihen von Formen mit $n-1$ Veränderlichen bereits bewiesen ist und wenden dasselbe auf die Formenreihe $g_{11}, g_{21}, g_{31}, \ldots$ an. Zufolge des Theorems I. giebt es dann eine Zahl μ von der Art, dass für jeden Werth von s eine Relation von der Gestalt

$$g_{s1} = b_{s1} g_{11} + b_{s2} g_{21} + \cdots + b_{s\mu} g_{\mu 1} = l_s(g_{11}, g_{21}, \ldots, g_{\mu 1})$$

besteht, wo $b_{s1}, b_{s2}, \ldots, b_{s\mu}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind. Wir bilden nun die Formen

$$(1) \qquad g_{st}^{(1)} = g_{st} - l_s(g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{\mu t}), \qquad (t = 1, 2, \ldots, r)$$

woraus sich insbesondere für $t = 1$

$$g_{s1}^{(1)} = 0$$

ergiebt. Wir nehmen hierauf wiederum das Theorem I. für den Fall von $n-1$ Veränderlichen in Anspruch, indem wir dasselbe auf die Formenreihe $g_{12}^{(1)}, g_{22}^{(1)}, g_{32}^{(1)}, \ldots$ anwenden. Zufolge dieses Theorems giebt es dann eine Zahl $\mu^{(1)}$ von der Art, dass für jeden Werth von s eine Relation von der Gestalt

$$g_{s2}^{(1)} = b_{s1}^{(1)} g_{12}^{(1)} + b_{s2}^{(1)} g_{22}^{(1)} + \cdots + b_{s\mu^{(1)}}^{(1)} g_{\mu^{(1)}2}^{(1)} = l_s^{(1)}\left(g_{12}^{(1)}, g_{22}^{(1)}, \ldots, g_{\mu^{(1)}2}^{(1)}\right)$$

besteht, wo $b_{s1}^{(1)}, b_{s2}^{(1)}, \ldots, b_{s\mu^{(1)}}^{(1)}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind. Wir setzen nun

$$(2) \qquad g_{st}^{(2)} = g_{st}^{(1)} - l_s^{(1)}\left(g_{1t}^{(1)}, g_{2t}^{(1)}, \ldots, g_{\mu^{(1)}t}^{(1)}\right), \qquad (t = 1, 2, \ldots, r)$$

woraus sich insbesondere für $t = 1, 2$

$$g_{s1}^{(2)} = 0, \qquad g_{s2}^{(2)} = 0$$

ergiebt. Die Anwendung des Theorems I. auf die Formenreihe $g_{13}^{(2)}, g_{23}^{(2)}, g_{33}^{(2)}, \ldots$ führt zu der Relation

$$g_{s3}^{(2)} = l_s^{(2)}\left(g_{13}^{(2)}, g_{23}^{(2)}, \ldots, g_{\mu^{(2)}3}^{(2)}\right)$$

und setzen wir dann

$$(3) \qquad g_{st}^{(3)} = g_{st}^{(2)} - l_s^{(2)}\left(g_{1t}^{(2)}, g_{2t}^{(2)}, \ldots, g_{\mu^{(2)}t}^{(2)}\right), \quad (t = 1, 2, \ldots, r)$$

so folgt insbesondere

$$g_{s1}^{(3)} = 0, \quad g_{s2}^{(3)} = 0, \quad g_{s3}^{(3)} = 0.$$

Nach wiederholter Anwendung dieses Verfahrens ergeben sich die Relationen

$$(4) \quad g_{st}^{(r-1)} = g_{st}^{(r-2)} - l_s^{(r-2)}\left(g_{1t}^{(r-2)}, g_{2t}^{(r-2)}, \ldots, g_{\mu^{(r-2)}t}^{(r-2)}\right), \quad (t = 1, 2, \ldots, r)$$

$$g_{s1}^{(r-1)} = 0, \quad g_{s2}^{(r-1)} = 0, \ldots, g_{s,r-1}^{(r-1)} = 0$$

und schliesslich erhält man

$$g_{sr}^{(r-1)} = l_s^{(r-1)}\left(g_{1r}^{(r-1)}, g_{2r}^{(r-1)}, \ldots, g_{\mu^{(r-1)}r}^{(r-1)}\right),$$

woraus

$$(5) \quad 0 = g_{st}^{(r-1)} - l_s^{(r-1)}\left(g_{1t}^{(r-1)}, g_{2t}^{(r-1)}, \ldots g_{\mu^{(r-1)}t}^{(r-1)}\right) \quad (t = 1, 2, \ldots r)$$

folgt. Durch Addition der Gleichungen (1), (2), (3), ..., (4), (5) ergiebt sich

$$g_{st} = l_s(g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{\mu t}) + l_s^{(1)}\left(g_{1t}^{(1)}, g_{2t}^{(1)}, \ldots, g_{\mu^{(1)}t}^{(1)}\right) + \cdots$$
$$+ l_s^{(r-1)}\left(g_{1t}^{(r-1)}, g_{2t}^{(r-1)}, \ldots, g_{\mu^{(r-1)}t}^{(r-1)}\right). \quad (t = 1, 2, \ldots, r).$$

Auf der rechten Seite dieser Formel können wir die Formen

$$g_{1t}^{(1)}, g_{2t}^{(1)}, \ldots, g_{\mu^{(1)}t}^{(1)}, \ldots, g_{1t}^{(r-1)}, g_{2t}^{(r-1)}, \ldots, g_{\mu^{(r-1)}t}^{(r-1)}$$

in Folge wiederholter Anwendung der Gleichungen (1), (2), (3), ..., (4) durch lineare Combinationen der Formen $g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{mt}$ ersetzen, wo m die grösste von den Zahlen $\mu, \mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r-1)}$ bezeichnet. Wir erhalten auf diese Weise aus der letzteren Formel ein Gleichungssystem von der Gestalt:

$$g_{st} = c_{s1}g_{1t} + c_{s2}g_{2t} + \cdots + c_{sm}g_{mt} = k_s(g_{1t}, g_{2t}, \ldots, g_{mt}),$$
$$(t = 1, 2, \ldots, r)$$

wo $c_{s1}, c_{s2}, \ldots, c_{sm}$ wiederum Formen der $n-1$ Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind. Multipliciren wir die letztere Formel mit y_n^{r-t} und addiren die daraus für $t = 1, 2, \ldots, r$ entstehenden Gleichungen, so folgt wegen

$$g_{s1}y_n^{r-1} + g_{s2}y_n^{r-2} + \cdots + g_{sr} = G_s - B_s G_1$$

die Gleichung

$$G_s - B_s G_1 = k_s(G_1 - B_1 G_1,\ G_2 - B_2 G_1, \ldots, G_m - B_m G_1),$$

oder, wenn C_s eine Form der n Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bezeichnet

$$G_s = C_s G_1 + k_s(G_1, G_2, \ldots, G_m) = L_s(G_1, G_2, \ldots, G_m),$$

d. h. die Zahl m ist für die Formenreihe $G_1, G_2, G_3, \ldots$ und folglich auch für die ursprünglich vorgelegte Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$ eine solche Zahl, wie sie Theorem I. verlangt. Somit gilt unser Theorem I. für den Fall von n Veränderlichen unter der Annahme, dass dasselbe für Formen von $n-1$ Veränderlichen bewiesen ist. Da das Theorem I. für eine Reihe von Formen e i n e r homogenen Veränderlichen oben bereits als richtig erkannt wurde, so gilt dasselbe allgemein.

Vermöge des Theorems I. lässt sich vor Allem diejenige Frage allgemein beantworten, welche zu Anfang dieser Arbeit angeregt wurde. Es sei nämlich ein beliebiges System von unbegrenzt vielen Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, wobei es freigestellt ist, ob diese Formen sich in eine Reihe ordnen lassen oder in nicht abzählbarer Menge vorhanden sind. Um ein solches Formensystem festzulegen, denke man sich ein Gesetz gegeben, vermöge dessen ausnahmslos für eine jede beliebig angenommene Form entschieden werden kann, ob sie zu dem Systeme gehören soll oder nicht. Wir nehmen nun an, es sei nicht möglich, aus dem gegebenen Formensystem eine endliche Zahl von Formen derart auszuwählen, dass jede andere Form des Systems durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann. Dann wählen wir nach Willkür aus dem System eine nicht identisch verschwindende Form aus und bezeichnen dieselbe mit F_1; ferner möge F_2 eine Form des Systems sein, welche nicht einem Producte von der Gestalt $A_1 F_1$ gleich ist, wo A_1 eine beliebige Form der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeutet; F_3 sei eine Form des Systems, welche sich nicht in die Gestalt $A_1 F_1 + A_2 F_2$ bringen lässt, wo A_1 und A_2 wiederum Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Entsprechend sei F_4 eine Form des Systems, welche sich nicht in die Gestalt $A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3$ bringen lässt und wenn wir in dieser Weise fortfahren, so gewinnen wir eine Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$, welche zu Folge der gemachten Annahme im Endlichen nicht abbrechen kann und in welcher trotzdem keine Form durch lineare Combination der vorhergehenden Formen erhalten werden kann. Dieses Ergebniss widerspricht unserem Theorem I. und da somit die vorhin gemachte Annahme unzulässig ist, so erhalten wir den Satz:

Aus einem jeden beliebig gegebenen Formensysteme lässt sich stets eine endliche Zahl von Formen derart auswählen, dass jede andere

Form des Systems durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann.

Wir betrachten insbesondere solche Formensysteme, denen die Eigenschaft zukommt, dass jedes Product einer Form des Systems mit einer beliebigen anderen, nicht nothwendig zum System gehörigen Form sowie jede in den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ homogene Summe von solchen Producten d. h. jede lineare Combination von Formen des Systems wiederum dem Systeme angehört. Ein solches System von unbegrenzt vielen Formen heisst ein Modul und somit lehnen diese Auseinandersetzungen, soweit sie späterhin die Theorie der Moduln betreffen, an diejenige Bezeichnungsweise und Begriffsbestimmung an, welche L. Kronecker in der von ihm begründeten und neuerdings systematisch ausgebildeten Theorie der Modulsysteme*) anwendet. Doch ist hervorzuheben, dass im Unterschiede zu den von L. Kronecker behandelten Fragen bei unseren Untersuchungen, vor Allem in Abschnitt III und IV dieser Arbeit, die Homogenität der Functionen des Moduls eine wesentliche und nothwendige Voraussetzung bildet. Sprechen wir den vorhin bewiesenen Satz insbesondere für einen Modul aus, so erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz:

Aus den Formen eines beliebigen Moduls lässt sich stets eine endliche Anzahl von Formen derart auswählen, dass jede andere Form des Moduls durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann.

Um für diesen Satz ein anschauliches Beispiel zu gewinnen, nehmen wir eine algebraische Raumcurve als gegeben an und fragen nach dem vollen Systeme der diese Raumcurve enthaltenden algebraischen Flächen. Da die linken Seiten der Gleichungen dieser Flächen quaternäre Formen sind, welche durch lineare Combination Formen des nämlichen Systems ergeben, so bilden diese Formen einen Modul und der obige Satz erhält mithin für diesen besonderen Fall die folgende Deutung:

Durch eine gegebene algebraische Raumcurve lässt sich eine endliche Zahl m von Flächen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_m = 0$$

hindurchlegen derart, dass jede andere die Curve enthaltende algebraische Fläche durch eine Gleichung von der Gestalt

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m = 0$$

---

*) Vgl. L. Kronecker, Crelle's Journal, Bd. 92, pag. 70—122, Bd. 93, pag. 365—366, Bd. 99, pag. 329—371, Bd. 100, pag. 490—510. Berliner Sitzungsberichte, 1888 pag. 249—258, 263—281, 331—352, 379—396, 615—648; und ferner: R. Dedekind und H. Weber, Crelle's Journal, Bd. 92, pag. 181—235, sowie J. Molk, Acta mathematica Bd. 6, pag. 50—165.

dargestellt werden kann, wo unter $A_1, A_2, \ldots, A_m$ quaternäre Formen zu verstehen sind).*

Beispielsweise sei eine cubische Raumcurve durch die Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \xi_1^3, \\ x_2 &= \xi_1^2\xi_2, \\ x_3 &= \xi_1\xi_2^2, \\ x_4 &= \xi_2^3 \end{aligned}$$

gegeben, wo x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten ihrer Punkte und ξ_1, ξ_2 die homogenen Parameter sind. Durch diese Raumcurve gehen die 3 Flächen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

hindurch, wo

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1x_3 - x_2^2, \\ F_2 &= x_2x_3 - x_1x_4, \\ F_3 &= x_2x_4 - x_3^2 \end{aligned}$$

quadratische Formen bedeuten, von denen keine durch lineare Combination der beiden anderen erhalten werden kann. Um nun zu zeigen, dass auch jede andere die Raumcurve enthaltende Fläche sich durch eine Gleichung von der Gestalt

$$A_1F_1 + A_2F_2 + A_3F_3 = 0$$

darstellen lässt, nehmen wir an, es sei

$$F = \sum C_{r_1r_2r_3r_4}\, x_1^{r_1}x_2^{r_2}x_3^{r_3}x_4^{r_4}$$

eine Form, welche bei Anwendung der Substitution (6) identisch gleich Null wird. Mit Hülfe der Congruenzen

$$\begin{aligned} x_1x_3 &\equiv x_2^2, \quad (F_1, F_2, F_3), \\ x_1x_4 &\equiv x_2x_3, \quad (F_1, F_2, F_3), \\ x_2x_4 &\equiv x_3^2, \quad (F_1, F_2, F_3) \end{aligned}$$

können wir setzen

$$(7)\quad F \equiv \sum C_{\varkappa_1\varkappa_2}x_1^{\varkappa_1}x_2^{\varkappa_2} + \sum C_{\lambda_2\lambda_3}x_2^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3} + \sum C_{\mu_3\mu_4}x_3^{\mu_3}x_4^{\mu_4}, \quad (F_1, F_2, F_3),$$

worin $C_{\varkappa_1\varkappa_2}, C_{\lambda_2\lambda_3}, C_{\mu_3\mu_4}$ wiederum gewisse Zahlencoefficienten bedeuten. Ausserdem darf angenommen werden, dass keiner der beiden Exponenten λ_2 und λ_3 gleich Null ist, da entgegengesetztenfalls das betreffende Glied sich aus der zweiten Summe entweder in die erste oder

*) Die hier erledigte Frage nach der Endlichkeit der eine Raumcurve enthaltenden Flächen wirft bereits G. Salmon in seinem Lehrbuche auf; vgl. analytische Geometrie des Raumes, Theil II, 79.

in die dritte Summe hineinziehen lässt. Wegen der Homogenität der rechten Seite von (7) ist

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = \mu_3 + \mu_4$$

und hieraus folgt

$$3\varkappa_1 + 2\varkappa_2 > 2\lambda_2 + \lambda_3 > \mu_3.$$

Führen wir jetzt vermöge der Gleichungen (6) die Parameter ξ_1, ξ_2 in der rechten Seite von (7) ein, so erkennen wir, dass keines der so entstehenden Glieder $C\xi_1^{\varrho_1}\xi_2^{\varrho_2}$ sich mit einem in der nämlichen oder in einer anderen Summe entstehenden Gliede vereinigen kann und da andererseits der Ausdruck auf der rechten Seite von (7) nach jener Substitution (6) verschwinden soll, so sind nothwendigerweise die Coefficienten $C_{\varkappa_1\varkappa_2}$, $C_{\lambda_2\lambda_3}$, $C_{\mu_3\mu_4}$ sämmtlich gleich Null. Aus der Congruenz (7) erhalten wir somit

$$F \equiv 0 \quad (F_1,\ F_2,\ F_3)$$

oder

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3.$$

Eine anderweitige Verwendung finden unsere allgemeinen Entwickelungen in der Theorie der Gleichungen, wenn man nach denjenigen ganzen homogenen Functionen der Coefficienten einer Gleichung fragt, welche verschwinden, sobald die Gleichung eine gewisse Anzahl vielfacher Wurzeln besitzt. Da das System aller dieser Functionen einen Modul bildet, so erhalten wir den Satz:

Es giebt eine endliche Anzahl von ganzen homogenen Functionen der Coefficienten einer algebraischen Gleichung, welche verschwinden, sobald die Gleichung eine gegebene Zahl vielfacher Wurzeln erhält und aus welchen sich eine jede andere ganze Function von derselben Eigenschaft in linearer Weise zusammensetzen lässt.

Sollen beispielsweise alle diejenigen homogenen Functionen der Coefficienten x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 der binären Form 4ter Ordnung

$$\varphi = x_1\xi_1^4 + 4x_2\xi_1^3\xi_2 + 6x_3\xi_1^2\xi_2^2 + 4x_4\xi_1\xi_2^3 + x_5\xi_2^4,$$

angegeben werden, welche verschwinden, sobald die Form φ eine volle 4te Potenz wird, so bedarf es dazu der folgenden 6 quadratischen Formen

$$\begin{aligned}
F_1 &= x_1x_3 - x_2^2,\\
F_2 &= x_1x_4 - x_2x_3,\\
F_3 &= x_1x_5 - x_2x_4,\\
F_4 &= x_1x_5 - x_3^2,\\
F_5 &= x_2x_5 - x_3x_4,\\
F_6 &= x_3x_5 - x_4^2,
\end{aligned}$$

und man überzeugt sich ohne Schwierigkeit auf dem entsprechenden Wege wie vorhin, dass jede andere Function F von der verlangten Eigenschaft in die Gestalt

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_6F_6$$

gebracht werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_6$ homogene Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sind.

Will man zweitens alle diejenigen homogenen Functionen der Coefficienten von φ angeben, welche verschwinden, sobald die binäre Form φ ein volles Quadrat wird, so ist es nöthig, die folgenden 7 Functionen zu bilden

$$\begin{aligned}
F_1 &= x_1^2x_4 - 3x_1x_2x_3 + 2x_2^3,\\
F_2 &= x_1^2x_5 + 2x_1x_2x_4 - 9x_1x_3^2 + 6x_2^2x_3,\\
F_3 &= x_1x_2x_5 - 3x_1x_3x_4 + 2x_2^2x_4,\\
F_4 &= x_1x_4^2 - x_2^2x_5,\\
F_5 &= x_1x_4x_5 - 3x_2x_3x_5 + 2x_2x_4^2,\\
F_6 &= x_1x_5^2 + 2x_2x_4x_5 - 9x_3^2x_5 + 6x_3x_4^2,\\
F_7 &= x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + 2x_4^3.
\end{aligned}$$

Diese 7 Functionen stimmen im wesentlichen überein mit den Coefficienten der Covariante 6^{ter} Ordnung und 3^{ten} Grades von φ und hieraus lässt sich durch ein invariantentheoretisches Schlussverfahren zeigen, dass jede andere homogene Function von der verlangten Eigenschaft in die Gestalt

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_7F_7$$

gebracht werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_7$ wiederum homogene Functionen sind.

Von allgemeinerer Natur und überdies von principieller Bedeutung für die späterhin folgenden Untersuchungen ist der folgende Satz:

Sind $F_1, F_2, \ldots, F_{m^{(1)}}$ gegebene Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so existirt stets eine endliche Zahl $m^{(2)}$ von Formensystemen

$$\begin{aligned}
&X_1 = X_{11}, \quad X_2 = X_{21}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}1},\\
&X_1 = X_{12}, \quad X_2 = X_{22}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&X_1 = X_{1m^{(2)}}, X_2 = X_{2m^{(2)}}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}m^{(2)}},
\end{aligned}$$

welche sämmtlich die Gleichung

$$F_1X_1 + F_2X_2 + \cdots + F_{m^{(1)}}X_{m^{(1)}} = 0$$

identisch befriedigen und durch welche jedes andere jener Gleichung genügende Formensystem in der Gestalt

$$\begin{aligned}
X_1 &= A_1X_{11} + A_2X_{12} + \cdots + A_{m^{(2)}}X_{1m^{(2)}},\\
X_2 &= A_1X_{21} + A_2X_{22} + \cdots + A_{m^{(2)}}X_{2m^{(2)}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_{m^{(1)}} &= A_1X_{m^{(1)}1} + A_2X_{m^{(1)}2} + \cdots + A_{m^{(2)}}X_{m^{(1)}m^{(2)}},
\end{aligned}$$

ausgedrückt werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(2)}}$ *ebenfalls Formen der Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sind.*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf unseren allgemeinen Entwickelungen über die Endlichkeit der Formen eines beliebigen Systems. Es sei $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ irgend ein Lösungssystem der vorgelegten Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_{m^{(1)}} X_{m^{(1)}} = 0$$

und in jedem solchen Lösungssysteme werde insbesondere die letzte Form $X_{m^{(1)}}$ ins Auge gefasst. Auf Grund unserer früheren allgemeinen Sätze ist es dann möglich, aus der Gesammtheit dieser Formen $X_{m^{(1)}}$ eine endliche Zahl μ von Formen $X_{m^{(1)}1}, X_{m^{(1)}2}, \ldots, X_{m^{(1)}\mu}$ derart auszuwählen, dass jede andere solche Form in die Gestalt

$$X_{m^{(1)}} = A_1' X_{m^{(1)}1} + A_2' X_{m^{(1)}2} + \cdots + A_\mu' X_{m^{(1)}\mu}$$

gebracht werden kann. Bilden wir nun die Formen

$$X_t' = X_t - A_1' X_{t1} - A_2' X_{t2} - \cdots - A_\mu' X_{t\mu} \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)}),$$

woraus sich insbesondere für $t = m^{(1)}$

$$X'_{m^{(1)}} = 0$$

ergiebt, so erkennen wir, dass jeder Lösung $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ der ursprünglich vorgelegten Gleichung eine Lösung $X_1', X_2', \ldots, X'_{m^{(1)}-1}$ der Gleichung

$$F_1 X_1' + F_2 X_2' + \cdots + F_{m^{(1)}-1} X'_{m^{(1)}-1} = 0$$

entspricht und es lässt sich offenbar auch umgekehrt jede Lösung der ursprünglich vorgelegten Gleichung durch Combination aus den μ Lösungssystemen

$$X_1 = X_{1s}, \; X_2 = X_{2s}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}s} \quad (s = 1, 2, \ldots, \mu)$$

und aus einem Lösungssystem der eben erhaltenen Gleichung zusammensetzen. Die letztere Gleichung enthält aber nur $m^{(1)} - 1$ zu bestimmende Formen und wenn folglich der oben ausgesprochene Satz für eine solche Gleichung als richtig angenommen wird, so ist derselbe auch für die vorgelegte Gleichung bewiesen. Nun gilt unser Satz für $m^{(1)} = 1$, da die diesem Falle entsprechende Gleichung

$$F_1 X_1 = 0$$

offenbar gar keine Lösung besitzt und damit ist der Beweis allgemein erbracht.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$(x_1 x_4 - x_2^2) X_1 + (x_2 x_3 - x_1 x_4) X_2 + (x_2 x_4 - x_3^2) X_3 = 0,$$

wo als Coefficienten die nämlichen 3 quadratischen Formen auftreten, auf welche wir oben bei Behandlung der cubischen Raumcurve geführt wurden. Wir erkennen leicht, dass aus den beiden Lösungssystemen

$$X_1 = x_3, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = x_1,$$
$$X_1 = x_4, \quad X_2 = x_3, \quad X_3 = x_2$$

sich jedes andere Lösungssystem jener Gleichung zusammensetzen lässt. Denn bezeichnet X_1, X_2, X_3 irgend ein Lösungssystem, so kann man zunächst mit Hülfe des ersteren der beiden Lösungssysteme alle diejenigen Glieder in der Form X_1 wegschaffen, welche x_3 als Factor enthalten und hierauf lassen sich mit Hülfe des zweiten Lösungssystems alle mit x_4 multiplicirten Glieder in X_1 beseitigen, sodass in dem nun entstandenen Lösungssysteme X_1', X_2', X_3' die Form X_1' von x_3 und x_4 unabhängig ist. Setzen wir jetzt in der identisch erfüllten Relation

$$(x_1 x_3 - x_2^2) X_1' + (x_2 x_3 - x_1 x_4) X_2' + (x_2 x_4 - x_3^2) X_3' = 0$$

$x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ ein, so ergiebt sich $X_1' = 0$ und hieraus folgt dann

$$X_2' = A(x_2 x_4 - x_3^2), \quad X_3' = A(x_1 x_4 - x_2 x_3),$$

wo A eine beliebige Form der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 bedeutet. Auch das so erhaltene Lösungssystem ist eine Combination jener beiden vorhin angegebenen Lösungssysteme, wie man erkennt, wenn man das erstere Lösungssystem mit Ax_4, das zweite mit $-Ax_3$ multiplicirt und dann die entsprechenden Formen addirt.

Als zweites Beispiel wählen wir die Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_6 X_6 = 0,$$

wo $F_1, F_2, \ldots, F_6$ die oben angegebenen 6 quadratischen Formen der 5 Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bedeuten. Man erhält die folgenden 8 Lösungen

$$\begin{array}{llllll}
X_1 = x_3, & X_2 = -x_2, & X_3 = -x_1, & X_4 = x_1, & X_5 = 0, & X_6 = 0, \\
X_1 = x_4, & X_2 = -x_3, & X_3 = -x_2, & X_4 = x_2, & X_5 = 0, & X_6 = 0, \\
X_1 = x_5, & X_2 = 0, & X_3 = -x_3, & X_4 = 0, & X_5 = x_2, & X_6 = 0, \\
X_1 = 0, & X_2 = x_3, & X_3 = 0, & X_4 = -x_2, & X_5 = x_1, & X_6 = 0, \\
X_1 = 0, & X_2 = x_4, & X_3 = -x_3, & X_4 = 0, & X_5 = 0, & X_6 = x_1, \\
X_1 = 0, & X_2 = x_5, & X_3 = -x_4, & X_4 = 0, & X_5 = 0, & X_6 = x_2, \\
X_1 = 0, & X_2 = 0, & X_3 = x_4, & X_4 = -x_4, & X_5 = x_3, & X_6 = -x_2, \\
X_1 = 0, & X_2 = 0, & X_3 = x_5, & X_4 = -x_5, & X_5 = x_4, & X_6 = -x_3,
\end{array}$$

und man zeigt dann in derselben Weise wie in ersterem Beispiele, dass jede andere Lösung durch Combination aus diesen erhalten werden kann.

Wir haben vorhin die Endlichkeit des vollen Systems von Lösungen für den Fall bewiesen, dass es sich um eine einzige Gleichung handelt. Aber die dort benutzte Schlussweise überträgt sich unmittelbar auf den Fall, in welchem mehrere Gleichungen von der in Rede stehenden

Art gleichzeitig zu befriedigen sind. Wir sprechen daher den allgemeineren Satz aus:

Wenn ein System von m Gleichungen

$$F_{t1} X_1 + F_{t2} X_2 + \cdots + F_{tm^{(1)}} X_{m^{(1)}} = 0 \quad (t=1,2,\ldots,m)$$

vorgelegt ist, in welchem die Coefficienten $F_{t1}, F_{t2}, \ldots, F_{tm^{(1)}}$ *gegebene Formen von n Veränderlichen und* $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ $m^{(1)}$ *zu bestimmende Formen sind, so besitzt dasselbe stets eine endliche Zahl* $m^{(2)}$ *von Lösungssystemen*

$$X_1 = X_{1s}, \ X_2 = X_{2s}, \ldots, X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)}s} \quad (s=1,2,\ldots,m^{(2)})$$

derart, dass jedes andere Lösungssystem in die Gestalt

$$X_l = A_1 X_{l1} + A_2 X_{l2} + \cdots + A_{m^{(2)}} X_{lm^{(2)}} \quad (l=1,2,\ldots,m^{(1)})$$

gebracht werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(2)}}$ *ebenfalls Formen der n Veränderlichen sind*).*

II.

Die Endlichkeit der Formen mit ganzzahligen Coefficienten.

Die sämmtlichen bisher abgeleiteten Sätze beruhen wesentlich auf dem Theoreme I des vorigen Abschnittes. Während wir dort die in den Formen auftretenden Coefficienten als Zahlen eines beliebigen Rationalitätsbereiches annahmen, so wollen wir nunmehr den Fall in Betracht ziehen, dass dieselben durchweg ganze Zahlen sind. Dementsprechend lässt sich jenem Theoreme I eine weitergreifende Fassung geben, welche dasselbe auch für Anwendungen auf zahlentheoretische Untersuchungen geeignet macht und, wie folgt, lautet:

Theorem II. *Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen* $F_1, F_2, F_3, \ldots$ *mit ganzzahligen Coefficienten und von beliebigen Ordnungen in den n homogenen Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *vorgelegt, so giebt es stets eine Zahl m von der Art, dass eine jede Form jener Reihe sich in die Gestalt*

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m$$

bringen lässt, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *ganzzahlige Formen der nämlichen n Veränderlichen sind.*

Wie man sieht, wird hier im Unterschiede zu der früheren Fassung des Theorems verlangt, dass in gleicher Weise wie die gegebenen Formen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ auch die bei der Darstellung zu verwendenden Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Formen mit ganzzahligen Coefficienten sind.

---

*) Dieser Satz ist für eine nicht homogene Veränderliche von L. Kronecker in seinem Beweise für die Endlichkeit des Systems der ganzen algebraischen Grössen einer Gattung zur Geltung gebracht; vgl. Crelle's J. Bd. 92, S. 18.

Die zum Beweise des Theorems I angewandte Schlussweise reicht zum Beweise des Theorems II nicht mehr aus. Denn das frühere Verfahren beruht darauf, dass wir die Grade der Formen $F_2, F_3, \ldots$ in Bezug auf die eine Veränderliche x_n durch geeignete Combination mit der Form F_1 unter die Ordnung r von F_1 herabdrückten. Sollen hierbei keine gebrochenen Zahlen eingeführt werden, so muss der Coefficient von x_n^r in F_1 nothwendig gleich der positiven oder negativen Einheit sein, was im Allgemeinen nicht der Fall ist und auch durch lineare ganzzahlige Transformationen der Veränderlichen nicht immer erreicht werden kann. Es bedarf daher zum Beweise des Theorems II einer neuen Schlussweise und durch diese gewinnen wir offenbar zugleich für Theorem I einen zweiten Beweis.

Wir bezeichnen allgemein mit f_s, die von der Veränderlichen x_n freien Glieder der Form F_s; sind dann alle Formen der unendlichen Reihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$ identisch Null, so setzen wir

$$F_s^{(1)} = F_s, \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

im anderen Falle sei f_α die erste von Null verschiedene Form der Reihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$, ferner f_β die erste Form derselben Reihe, welche nicht einem Producte von der Gestalt $a_\alpha f_\alpha$ gleich ist, worin a_α eine ganzzahlige Form der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bedeutet; f_γ sei die erste Form jener Reihe, welche sich nicht in die Gesalt $a_\alpha f_\alpha + a_\beta f_\beta$ bringen lässt, wo a_α und b_β wiederum ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind und in dieser Weise fahren wir fort. Wäre nun unser Theorem II für den Fall von $n-1$ homogenen Veränderlichen bereits bewiesen und beachten wir, dass in der gewonnenen Formenreihe $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, \ldots$ keine Form durch lineare Combination aus den vorhergehenden Formen erhalten werden kann, so folgt, dass diese Formenreihe nothwendig im Endlichen abbrechen muss. Es sei demgemäss f_λ die letzte Form dieser Reihe, so dass stets

$$f_s = a_{\alpha s} f_\alpha + a_{\beta s} f_\beta + \cdots + a_{\lambda s} f_\lambda = l_s(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda), \quad (s=1,2,3,\ldots)$$

gesetzt werden kann, wo $a_{\alpha s}, a_{\beta s}, \ldots, a_{\lambda s}$ ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Bilden wir nun die Ausdrücke

$$F_s^{(1)} = F_s - l_s(F_\alpha, F_\beta, \ldots, F_\lambda), \quad (s=1,2,3,\ldots)$$

so sind dies Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, von denen jede die Veränderliche x_n als Factor enthält. Wir bezeichnen allgemein mit $x_n f_s^{(1)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(1)}$, welche lediglich mit der ersten Potenz von x_n multiplicirt sind und betrachten die Formen $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$ der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Verschwinden diese Formen sämmtlich, so setzen wir

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)}, \qquad (s=1,2,3,\ldots).$$

Ist dagegen jede Form der Reihe $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$ eine lineare Combination der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$, wie folgt

$$f_s^{(1)} = a_{\alpha s}^{(1)} f_\alpha + a_{\beta s}^{(1)} f_\beta + \cdots + a_{\lambda s}^{(1)} f_\lambda = l_s^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda), \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

so setzen wir

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda).$$

In jedem anderen Falle sei $f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}$ die erste nicht durch lineare Combination aus $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$ hervorgehende Form der Reihe $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$, ferner sei $f_{\beta^{(1)}}^{(1)}$ die erste Form dieser Reihe, welche keiner linearen Combination der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}$ gleich ist und entsprechend $f_{\gamma^{(1)}}^{(1)}$ die erste nicht durch lineare Combination von $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}$ hervorgehende Form der nämlichen Reihe. Die so entstehende Formenreihe $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, f_{\gamma^{(1)}}^{(1)}, \ldots$ bricht unter der vorhin gemachten Annahme nothwendig im Endlichen ab, und wenn $f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$ die letzte Form der Reihe bezeichnet, so finden wir stets

$$f_s^{(1)} = l_s^{(1)}\left(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}\right), \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

wo $l_s^{(1)}$ eine lineare homogene Function jener Formen bedeutet, deren Coefficienten selber ganzzahlige Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Setzen wir daher

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}\left(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda, F_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, F_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, F_{\lambda^{(1)}}^{(1)}\right),$$

so besitzen die so entstehenden Formen $F_s^{(2)}$ der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämmtlich den Factor x_n^2. Wir bezeichnen demgemäss allgemein mit $x_n^2 f_s^{(2)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(2)}$, welche lediglich mit der zweiten Potenz der Veränderlichen x_n multiplicirt sind und betrachten die Formen $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \ldots$ der $n-1$ Veränderlichen $x_1\ x_2, \ldots, x_{n-1}$. Sind diese Formen nicht sämmtlich Null oder lineare Combinationen der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$, so bezeichne $f_{\alpha^{(2)}}^{(2)}$ die erste nicht in dieser Weise durch lineare Combination entstehende Form jener Reihe; desgleichen sei $f_{\beta^{(2)}}^{(2)}$ die erste nicht durch $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}, f_{\alpha^{(2)}}^{(2)}$ linear darstellbare Form in derselben Reihe. Das in dieser Weise eingeleitete Verfahren muss wiederum nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen abbrechen, vorausgesetzt, dass unser Theorem II für den Fall von $n-1$ Veränderlichen richtig ist. Bezeichnet demgemäss $f_{\lambda^{(2)}}^{(2)}$ die letzte durch jenes Verfahren sich ergebende Form, so wird stets

$$f_s^{(2)} = l_s^{(2)}\left(f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}, f_{\alpha^{(2)}}^{(2)}, f_{\beta^{(2)}}^{(2)}, \ldots, f_{\lambda^{(2)}}^{(2)}\right), \quad (s=1,2,3,\ldots)$$

wo $l_s^{(2)}$ eine lineare homogene Function bedeutet, deren Coefficienten selber ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Setzen wir daher

$$F_s^{(3)} = F_s^{(2)} - l_s^{(2)}\Big(x_n^2 F_\alpha, x_n^2 F_\beta, \ldots, x_n^2 F_\lambda, x_n F_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, x_n F_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, x_n F_{\lambda^{(1)}}^{(1)},$$
$$F_{\alpha^{(2)}}^{(2)}, F_{\beta^{(2)}}^{(2)}, \ldots, F_{\lambda^{(2)}}^{(2)}\Big), \quad (s=1,2,3,\ldots),$$

so besitzen die so entstehenden Formen $F_s^{(3)}$ sämmtlich den Factor x_n^3. Wir bezeichnen wiederum allgemein mit $x_n^3 f_s^{(3)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(3)}$, welche mit keiner höheren als der dritten Potenz von x_n multiplicirt sind und gelangen so zu einer Formenreihe $f_1^{(3)}, f_2^{(3)}, f_3^{(3)}, \ldots$, welche in entsprechender Weise einer weiteren Behandlung zu unterwerfen ist. Es ist klar, wie die fortgesetzte Wiederholung des angegebenen Verfahrens zu der folgenden Formenreihe führt

$$f_{\alpha^{(\pi)}}^{(\pi)}, f_{\beta^{(\pi)}}^{(\pi)}, \ldots, f_{\lambda^{(\pi)}}^{(\pi)}, f_{\alpha^{(\tau)}}^{(\tau)}, f_{\beta^{(\tau)}}^{(\tau)}, \ldots, f_{\lambda^{(\tau)}}^{(\tau)}, \ldots, \ldots$$

wo $\pi, \tau, \ldots$ gewisse ganze positive Zahlen bedeuten und keine der auftretenden Formen einer linearen Combination der vorhergehenden Formen gleich ist. In Folge des letzteren Umstandes muss auch jene Reihe im Endlichen abbrechen, vorausgesetzt, dass unser Theorem II für den Fall von $n-1$ Veränderlichen richtig ist. Wir bezeichnen die letzte Form jener Reihe mit $f_{\lambda^{(\omega)}}^{(\omega)}$ und zeigen nun, dass jede Form in der ursprünglich vorgelegten Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$ einer linearen Combination der Formen

$$(8)\quad F_{\alpha^{(\pi)}}^{(\pi)}, F_{\beta^{(\pi)}}^{(\pi)}, \ldots, F_{\lambda^{(\pi)}}^{(\pi)}, F_{\alpha^{(\tau)}}^{(\tau)}, F_{\beta^{(\tau)}}^{(\tau)}, \ldots, F_{\lambda^{(\tau)}}^{(\tau)}, \ldots, F_{\alpha^{(\omega)}}^{(\omega)}, F_{\beta^{(\omega)}}^{(\omega)}, \ldots, F_{\lambda^{(\omega)}}^{(\omega)}$$

gleich wird. Ist nämlich F_s irgend eine Form der ursprünglich vorgelegten Formenreihe und r die Ordnung dieser Form in Bezug auf die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so betrachten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_s^{(r+1)} &= F_s^{(r)} - l_s^{(r)}, \\ F_s^{(r)} &= F_s^{(r-1)} - l_s^{(r-1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_s^{(1)} &= F_s - l_s, \end{aligned}$$

wo $l_s^{(r)}, l_s^{(r-1)}, \ldots, l_s$ lineare Combinationen der eben vorhin angegebenen Formen (8) sind. Da ferner die Form $F_s^{(r+1)}$ eine homogene Function von der Ordnung r ist und in Folge ihrer Bildungsweise durch x_n^{r+1} theilbar ist, so ist sie nothwendig identisch gleich Null und aus den obigen Gleichungen folgt, dass auch F_s eine lineare Combination der vorhin angegebenen Formen (8) ist. Diese Formen (8) ihrerseits sind nun aus den Formen

$$F_{\alpha^{(\pi)}}, F_{\beta^{(\pi)}}, \ldots, F_{\lambda^{(\pi)}}, F_{\alpha^{(\tau)}}, F_{\beta^{(\tau)}}, \ldots, F_{\lambda^{(\tau)}}, \ldots, F_{\alpha^{(\omega)}}, F_{\beta^{(\omega)}}, \ldots, F_{\lambda^{(\omega)}}$$

durch lineare Combination entstanden und es ist daher offenbar

$m = \lambda^{(\omega)}$ eine Zahl von der Beschaffenheit, wie sie unser Theorem II verlangt. Das Theorem II ist mithin für n Veränderliche bewiesen, unter der Voraussetzung, dass dasselbe für $n-1$ Veränderliche gilt.

Es bedarf jetzt noch des Nachweises, dass das Theorem II für Formen ohne Veränderliche d. h. für eine nicht abbrechende Reihe von ganzen Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ gilt. Um diesen Nachweis zu führen, nehmen wir an, es sei c_μ die erste von Null verschiedene Zahl der Reihe; es sei ferner $c_{\mu'}$ die nächste Zahl der Reihe, welche nicht durch c_μ theilbar ist. Wir bestimmen dann den grössten gemeinsamen Theiler $c_{\mu\mu'}$ der beiden Zahlen c_μ und $c_{\mu'}$; derselbe ist jedenfalls kleiner als der absolute Werth von c_μ. Wenn es nun noch eine Zahl $c_{\mu''}$ in jener Reihe giebt, welche nicht durch $c_{\mu\mu'}$ theilbar ist, so bestimmen wir den grössten gemeinsamen Theiler $c_{\mu\mu'\mu''}$ der beiden Zahlen $c_{\mu\mu'}$ und $c_{\mu''}$ und es ist dann $c_{\mu\mu'\mu''}$ kleiner als $c_{\mu\mu'}$. Auf diese Weise ergiebt sich die Zahlenreihe $c_\mu, c_{\mu\mu'}, c_{\mu\mu'\mu''}, \ldots$, in welcher jede Zahl kleiner ist als die vorhergehende. Eine solche Reihe bricht nothwendig im Endlichen ab und es sei $c_{\mu\mu'\ldots\mu^{(\varkappa)}}$ die letzte Zahl jener Reihe. Diese Zahl ist der grösste gemeinsame Theiler der Zahlen $c_\mu, c_{\mu'}, \ldots, c_{\mu^{(\varkappa)}}$ und es lassen sich daher ganze positive oder negative Zahlen $a, a', \ldots, a^{(\varkappa)}$ derart finden, dass

$$c_{\mu\mu'\ldots\mu^{(\varkappa)}} = a c_\mu + a' c_{\mu'} + \cdots + a^{(\varkappa)} c_{\mu^{(\varkappa)}}$$

wird. Da andererseits jede Zahl der ursprünglich vorgelegten Reihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ein Vielfaches der Zahl $c_{\mu\mu'\ldots\mu^{(\varkappa)}}$ ist, so wird $m = \mu^{(\varkappa)}$ eine Zahl von der Beschaffenheit, wie sie unser Theorem II verlangt.

Aus dem eben bewiesenen Theoreme lassen sich ohne Schwierigkeit alle diejenigen Sätze entwickeln, welche den in dem ersten Abschnitte aus Theorem I abgeleiteten Sätzen entsprechen. Wir wollen jedoch in dieser Richtung die Untersuchung nicht fortführen, sondern uns im Folgenden lediglich auf die Behandlung solcher Fragen beschränken, welche in den Wirkungskreis des Theorems I fallen.

III.

Die Gleichungen zwischen den Formen beliebiger Formensysteme.

Wir knüpfen an die Entwickelungen in Abschnitt I an und denken uns demgemäss im weiteren Verlaufe der Untersuchung die Coefficienten der in Betracht kommenden Formen nicht speciell als ganze Zahlen, sondern als irgend welche Zahlen eines beliebigen Rationalitätsbereiches.

Ist der Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_{m^{(1)}})$ vorgelegt, so erhalten wir alle übrigen Formen dieses Moduls d. h. alle nach demselben der Null congruenten Formen, wenn wir den Ausdruck

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_{m^{(1)}} F_{m^{(1)}}$$

bilden und die Ordnungen der Formen $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(1)}}$ so wählen, dass die Producte $A_1 F_1, A_2 F_2, \ldots, A_{m^{(1)}} F_{m^{(1)}}$ sämmtlich von der nämlichen Ordnung in den Veränderlichen sind und ihre Summe folglich eine homogene Function darstellt. Es werden nun zwei verschiedene Formensysteme $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(1)}}$ und $B_1, B_2, \ldots, B_{m^{(1)}}$ die nämliche Form des Moduls liefern, wenn

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_{m^{(1)}} F_{m^{(1)}} = B_1 F_1 + B_2 F_2 + \cdots + B_{m^{(1)}} F_{m^{(1)}}$$

oder

$$(A_1 - B_1) F_1 + (A_2 - B_2) F_2 + \cdots + (A_{m^{(1)}} - B_{m^{(1)}}) F_{m^{(1)}} = 0$$

wird d. h.: wir erhalten aus dem Formensysteme $A_1, A_2, \ldots, A_{m^{(1)}}$ alle übrigen zu der nämlichen Form des Moduls führenden Systeme $B_1, B_2, \ldots, B_{m^{(1)}}$ mittelst der Formeln

$$B_1 = A_1 + X_1, \; B_2 = A_2 + X_2, \ldots, B_{m^{(1)}} = A_{m^{(1)}} + X_{m^{(1)}},$$

wo $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ irgend ein Lösungssystem der Gleichung

$$(9) \qquad F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_{m^{(1)}} X_{m^{(1)}} = 0$$

bedeutet. Um daher eine gründlichere Einsicht in die Structur des vorgelegten Moduls zu erhalten, ist eine Untersuchung der letzteren Gleichung nothwendig, wo dann $F_1, F_2, \ldots, F_{m^{(1)}}$ als die gegebenen Coefficienten und $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ als die gesuchten Formen zu betrachten sind. Nach den Entwicklungen in Abschnitt I besitzt eine solche Gleichung eine endliche Zahl $m^{(2)}$ von Lösungssystemen

$$X_1 = F^{(1)}_{1s}, \; X_2 = F^{(1)}_{2s}, \ldots, X_{m^{(1)}} = F^{(1)}_{m^{(1)}s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m^{(2)})$$

derart, dass jedes andere Lösungssystem sich in die Gestalt

$$(10) \; X_t = A^{(1)}_1 F^{(1)}_{t1} + A^{(1)}_2 F^{(1)}_{t2} + \cdots + A^{(1)}_{m^{(2)}} F^{(1)}_{tm^{(2)}} \qquad (t = 1, 2, \ldots m^{(1)})$$

bringen lässt, wo $A^{(1)}_1, A^{(1)}_2, \ldots, A^{(1)}_{m^{(2)}}$ Formen der nämlichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Unter diesen $m^{(2)}$ Lösungssystemen möge überdies keines vorhanden sein, welches aus den übrigen durch lineare Combination erhalten werden kann. Verändern wir nun in den Formeln (10) die Formen $A^{(1)}_1, A^{(1)}_2, \ldots, A^{(1)}_{m^{(2)}}$, so gelangen wir dadurch nicht immer nothwendig zu einem anderen Lösungssystem der Gleichung (9), es werden vielmehr zwei verschiedene Formensysteme $A^{(1)}_1, A^{(1)}_2, \ldots, A^{(1)}_{m^{(2)}}$ und $B^{(1)}_1, B^{(1)}_2, \ldots, B^{(1)}_{m^{(2)}}$ dann das nämliche Lösungssystem $X_1, X_2, \ldots, X_m$ liefern, wenn

$$A_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + A_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \cdots + A_{m^{(2)}}^{(1)} F_{tm^{(2)}}^{(1)} = B_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + B_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \cdots + B_{m^{(2)}}^{(1)} F_{tm^{(2)}}^{(1)}$$
$$(t=1,2,\ldots,m^{(1)})$$

oder

$$\left(A_1^{(1)} - B_1^{(1)}\right) F_{t1}^{(1)} + \left(A_2^{(1)} - B_2^{(1)}\right) F_{t2}^{(1)} + \cdots + \left(A_{m^{(2)}}^{(1)} - B_{m^{(2)}}^{(1)}\right) F_{tm^{(2)}}^{(1)} = 0$$
$$(t=1,2,\ldots,m^{(1)})$$

wird und auf diese Weise werden wir auf die Untersuchung des Gleichungsystems

$$(11)\quad F_{t1}^{(1)} X_1^{(1)} + F_{t2}^{(1)} X_2^{(1)} + \cdots + F_{tm^{(2)}}^{(1)} X_{m^{(2)}}^{(1)} = 0 \quad (t=1,2,\ldots,m^{(1)})$$

geführt, wo $F_{t1}^{(1)}, F_{t2}^{(1)}, \ldots, F_{tm^{(2)}}^{(1)}$ die gegebenen Coefficienten und $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_{m^{(2)}}^{(1)}$ die zu bestimmenden Formen sind. Das erhaltene Gleichungssystem (11) heisse das aus (9) „abgeleitete Gleichungssystem".

Es sei hier besonders hervorgehoben, dass bei der Bildung des abgeleiteten Gleichungssystems ein derartiges volles Formensystem zu Grunde gelegt wird, in welchem keine Lösung durch lineare Combination der übrigen Lösungen erhalten werden kann. Die Zahl und die Ordnungen der Lösungen eines solchen Lösungssystems sind, wie man leicht erkennt, vollkommen bestimmte und auch die in den Lösungen auftretenden Formen sind im wesentlichen bestimmte, insofern jedes andere Lösungssystem von der nämlichen Beschaffenheit dadurch entsteht, dass man die Lösungen des anfänglichen Systems mit anderen darin vorkommenden Lösungen von gleichen oder niederen Ordnungen linear combinirt. Zufolge dieses Umstandes ist auch das abgeleitete Gleichungssystem durch das ursprüngliche Gleichungssystem in entsprechendem Sinne ein bestimmtes.

Die Coefficienten des abgeleiteten Gleichungssystems bestehen, wie man sieht, aus den Formen der Lösungssysteme der ursprünglichen Gleichung und wir erhalten somit die zwischen den Lösungen der ursprünglichen Gleichung (9) bestehenden Relationen durch Aufstellung der Lösungen des abgeleiteten Gleichungssystems (11). Wir bestimmen demgemäss für das letztere das volle System von Lösungen

$$X_1^{(1)} = F_{1s}^{(2)},\ X_2^{(1)} = F_{2s}^{(2)}, \ldots, X_{m^{(2)}}^{(1)} = F_{m^{(2)}s}^{(2)} \qquad (s=1,2,\ldots,m^{(3)})$$

derart, dass keine dieser Lösungen durch lineare Combination der übrigen erhalten werden kann und überdies jedes andere Lösungssystem die Gestalt

$$X_t^{(1)} = A_1^{(2)} F_{t1}^{(2)} + A_2^{(2)} F_{t2}^{(2)} + \cdots + A_{m^{(3)}}^{(2)} F_{tm^{(3)}}^{(2)} \qquad (t=1,2,\ldots,m^{(2)})$$

annimmt, wo $A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \ldots, A_{m^{(3)}}^{(2)}$ irgend welche Formen sind. Der letztere Ansatz führt auf das Gleichungssystem

$$(12)\quad F_{t1}^{(2)} X_1^{(2)} + F_{t2}^{(2)} X_2^{(2)} + \cdots + F_{tm^{(3)}}^{(2)} X_{m^{(3)}}^{(2)} = 0, \qquad (t=1,2,\ldots,m^{(2)})$$

wo $F_{t1}^{(2)}, F_{t2}^{(2)}, \ldots, F_{tm^{(3)}}^{(2)}$ die gegebenen Coefficienten und $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_{m^{(3)}}^{(2)}$ die zu bestimmenden Formen sind. Dieses dritte Gleichungssystem (12) ist aus dem zweiten Gleichungssysteme (11) in der nämlichen Weise abgeleitet, wie das zweite Gleichungssystem aus der ursprünglichen Gleichung (9). Durch Fortsetzung des eben eingeschlagenen Verfahrens erhalten wir eine Kette von abgeleiteten Gleichungssystemen, in welcher stets die Zahl der zu bestimmenden Formen irgend eines Gleichungssystemes übereinstimmt mit der Zahl der Gleichungen des darauf folgenden Gleichungssystems.

Zur einheitlicheren Darstellung der weiteren Untersuchungen ist es nöthig, an Stelle der einen ursprünglichen Gleichung (9) ein beliebiges Gleichungssystem von der Gestalt

$$(13)\quad F_{t1} X_1 + F_{t2} X_2 + \cdots + F_{tm^{(1)}} X_{m^{(1)}} = 0 \qquad (t=1,2,\ldots,m)$$

zu setzen. Die Anwendung des oben angegebenen Verfahrens gestaltet sich dann zu einer allgemeinen Theorie solcher Gleichungssysteme, deren Kern in dem folgenden Satze liegt:

Theorem III. *Ist ein Gleichungssystem von der Gestalt* (13) *vorgelegt, so führt die Aufstellung der Relationen zwischen den Lösungen desselben zu einem zweiten Gleichungssysteme von der nämlichen Gestalt; aus diesem zweiten abgeleiteten Gleichungssysteme entspringt in gleicher Weise ein drittes abgeleitetes Gleichungssystem. Das so begonnene Verfahren erreicht bei weiterer Fortsetzung stets ein Ende und zwar ist spätestens das n^{te} Gleichungssystem jener Kette ein solches, welches keine Lösung mehr besitzt.*

Der Beweis dieses Theorems ist nicht mühelos; er ergiebt sich aus den folgenden Schlüssen.

Unter den Gleichungen des vorgelegten Systems könnten einige eine Folge der übrigen sein, indem sie von jedem Formensysteme befriedigt werden, welches diesen letzteren Gleichungen genügt. Nehmen wir an, dass solche Gleichungen bereits ausgeschaltet sind, so ist, wenn überhaupt Lösungen vorhanden sein sollen, nothwendig, die Zahl m der Gleichungen des Systems (13) kleiner als die Zahl $m^{(1)}$ der zu bestimmenden Formen und ausserdem sind die m-reihigen Determinanten

$$D_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \begin{vmatrix} F_{1i_1} & F_{1i_2} & \cdots & F_{1i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{mi_1} & F_{mi_2} & \cdots & F_{mi_m} \end{vmatrix}$$

wo $i_1, i_2, \ldots, i_m$ irgend m von den Zahlen $1, 2, \ldots, m^{(1)}$ bedeuten, nicht sämmtlich gleich Null. Es sei etwa $D = D_{12\ldots m}$ eine nicht verschwindende Form von der Ordnung r und zwar möge diese Determinante D so ausgewählt sein, dass die Ordnungen der übrigen Determinanten in den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nicht grösser als r sind. Wir denken uns ausserdem eine derartige homogene lineare Substitution der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausgeführt, dass dadurch der Coefficient von x_n^r in D einen von Null verschiedenen Werth erhält. Das Gleichungssystem (13) besitzt offenbar folgende Lösungen

$$(14)\quad \begin{array}{l} X_1 = D_{m+1,2,\ldots,m}, \ldots, X_m = D_{1,2,\ldots,m-1,m+1}, X_{m+1} = D, X_{m+2} = 0, \ldots, X_{m^{(1)}} = 0, \\ X_1 = D_{m+2,2,\ldots,m}, \ldots, X_m = D_{1,2,\ldots,m-1,m+2}, X_{m+1} = 0, X_{m+2} = D, \ldots, X_{m^{(1)}} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ X_1 = D_{m^{(1)},2,\ldots,m}, \ldots, X_m = D_{1,2,\ldots,m-1,m^{(1)}}, X_{m+1} = 0, X_{m+2} = 0, \ldots, X_{m^{(1)}} = D. \end{array}$$

Ist nun eine Lösung $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ des Gleichungssystems (13) vorgelegt, so lässt sich durch Combination mit der ersten Lösung in (14) aus jenem Lösungssystem $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ ein anderes ableiten, in welchem an Stelle der Form X_{m+1} eine Form steht, deren Grad in Bezug auf die Veränderliche x_n kleiner ist, als die Ordnung r von D angiebt, während die Formen $X_{m+2}, X_{m+3}, \ldots, X_{m^{(1)}}$ ungeändert bleiben. Die so erhaltene Lösung lässt sich wiederum mit dem zweiten Lösungssystem in (14) derart combiniren, dass an Stelle der Form X_{m+2} eine Form tritt, deren Grad in Bezug auf die Veränderliche x_n kleiner als r ist und wir erhalten durch entsprechende Verwendung der übrigen Lösungen in (14) schliesslich eine Lösung $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_{m^{(1)}}$, wo die Formen $\Xi_{m+1}, \Xi_{m+2}, \ldots, \Xi_{m^{(1)}}$ in Bezug auf x_n von einem niederen Grade sind als die Zahl r angiebt. Wir wollen zeigen, dass dann auch die Grade der Formen $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_m$ bezüglich der Veränderlichen x_n kleiner sind als r. Zu dem Zwecke multipliciren wir die Gleichung

$$F_{t1}\Xi_1 + F_{t2}\Xi_2 + \cdots + F_{tm^{(1)}}\Xi_{m^{(1)}} = 0$$

mit der auf das Element F_{ts} bezüglichen $m-1$ reihigen Unterdeterminante von D und summiren alle auf diese Weise für $t = 1, 2, \ldots, m$ entstehenden Gleichungen. Wir erhalten so eine Relation von der Gestalt

$$D\Xi_s + D_{1,2,\ldots,m+1,\ldots,m}\Xi_{m+1} + D_{1,2,\ldots,m+2,\ldots,m}\Xi_{m+2} + D_{1,2,\ldots,m^{(1)},\ldots,m}\Xi_{m^{(1)}} = 0,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m)$$

und da die Ordnungen der hier vorkommenden Determinanten nicht grösser sind als die Ordnung r von D, so sind in der That die Grade der Formen Ξ_s in Bezug auf x_n sämmtlich kleiner als r.

Der eben bewiesene Umstand rechtfertigt den Ansatz

$$(15) \qquad \Xi_s = \xi_{s1} x_n^{r-1} + \xi_{s2} x_n^{r-2} + \cdots + \xi_{sr}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

wo $\xi_{s1}, \xi_{s2}, \ldots, \xi_{sr}$ Formen bedeuten, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Wenn wir diese $m^{(1)}$ Ausdrücke $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_{m^{(1)}}$ aus (15) beziehungsweise für $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ in die ursprünglichen Gleichungen (13) eintragen, linker Hand nach Potenzen von x_n ordnen und die mit gleichen Potenzen von x_n multiplicirten Ausdrücke einzeln gleich Null setzen, so erhalten wir eine gewisse Anzahl μ von Gleichungen zur Bestimmung der $m^{(1)}r$ Formen $\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{m^{(1)}r}$. Bezeichnen wir der Kürze halber die letzteren Formen mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\mu^{(1)}}$, so erhalten jene μ Gleichungen die Gestalt

$$(16) \qquad \varphi_{t1}\xi_1 + \varphi_{t2}\xi_2 + \cdots + \varphi_{t\mu^{(1)}}\xi_{\mu^{(1)}} = 0, \qquad (t = 1, 2, \ldots, \mu)$$

wo die Coefficienten $\varphi_{t1}, \varphi_{t2}, \ldots, \varphi_{t\mu^{(1)}}$ bekannte Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Es sei nun

$$\xi_1 = \varphi^{(1)}_{1s}, \; \xi_2 = \varphi^{(1)}_{2s}, \ldots, \xi_{\mu^{(1)}} = \varphi^{(1)}_{\mu^{(1)}s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu^{(2)})$$

ein volles Lösungssystem von (16) und zwar ein solches, in welchem keine Lösung durch lineare Combination der übrigen Lösungen erhalten werden kann. Aus einer jeden Lösung dieses Lösungssystems lässt sich vermöge (15) eine Lösung der ursprünglichen Gleichungen (13) zusammensetzen. Die so erhaltenen Lösungen der Gleichungen (13) seien

$$(17) \qquad \Xi_1 = \Phi^{(1)}_{1s}, \; \Xi_2 = \Phi^{(1)}_{2s}, \ldots, \Xi_{m^{(1)}} = \Phi^{(1)}_{m^{(1)}s}. \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu^{(2)})$$

Durch Zusammenfassung der bisher angestellten Ueberlegungen gelangen wir zu dem Ergebniss, dass eine jede Lösung $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ der ursprünglichen Gleichung (13) sich in die Gestalt

$$\begin{aligned}
X_1 &= a^{(1)}_1 \Phi^{(1)}_{11} + a^{(1)}_2 \Phi^{(1)}_{12} + \cdots + a^{(1)}_{\mu^{(2)}} \Phi^{(1)}_{1\mu^{(2)}} + A^{(1)}_1 D_{m+1, 2, \ldots, m} \\
&\qquad + A^{(1)}_2 D_{m+2, 2, \ldots, m} + \cdots + A^{(1)}_{m^{(1)}-m} D_{m^{(1)}, 2, \ldots, m}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_m &= a^{(1)}_1 \Phi^{(1)}_{m1} + a^{(1)}_2 \Phi^{(1)}_{m2} + \cdots + a^{(1)}_{\mu^{(2)}} \Phi^{(1)}_{m\mu^{(2)}} + A^{(1)}_1 D_{1, 2, \ldots, m-1, m+1} \\
&\qquad + A^{(1)}_2 D_{1, 2, \ldots, m-1, m+2} + \cdots + A^{(1)}_{m^{(1)}-m} D_{1, 2, \ldots, m-1, m^{(1)}}, \\
X_{m+1} &= a^{(1)}_1 \Phi^{(1)}_{m+1, 1} + a^{(1)}_2 \Phi^{(1)}_{m+1, 2} + \cdots + a^{(1)}_{\mu^{(2)}} \Phi^{(1)}_{m+1, \mu^{(2)}} + A^{(1)}_1 D + 0 + \cdots + 0, \\
X_{m+2} &= a^{(1)}_1 \Phi^{(1)}_{m+2, 1} + a^{(1)}_2 \Phi^{(1)}_{m+2, 2} + \cdots + a^{(1)}_{\mu^{(2)}} \Phi^{(1)}_{m+2, \mu^{(2)}} + 0 + A^{(1)}_2 D + \cdots + 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_{m^{(1)}} &= a^{(1)}_1 \Phi^{(1)}_{m^{(1)}1} + a^{(1)}_2 \Phi^{(1)}_{m^{(1)}2} + \cdots + a^{(1)}_{\mu^{(2)}} \Phi^{(1)}_{m^{(1)}\mu^{(2)}} + 0 + 0 + \cdots + A^{(1)}_{m^{(1)}-m} D
\end{aligned}$$

bringen lässt, wo $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_{\mu^{(2)}}^{(1)}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Insbesondere müssen daher auch die Lösungen

$$X_1 = x_n \Phi_{1s}^{(1)},\ X_2 = x_n \Phi_{2s}^{(1)}, \ldots, X_{m^{(1)}} = x_n \Phi_{m^{(1)}s}^{(1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu^{(2)})$$

in obiger Gestalt darstellbar sein und wir setzen dem entsprechend

$$
\begin{aligned}
& x_n \Phi_{1s}^{(1)} = \psi_{1s}^{(2)} \Phi_{11}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{1\mu^{(2)}}^{(1)} + \chi_{1s}^{(2)} D_{m+1,2,\ldots,m} + \cdots + \chi_{m^{(1)}-m,s}^{(2)} D_{m^{(1)},2,\ldots,m}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& x_n \Phi_{ms}^{(1)} = \psi_{1s}^{(2)} \Phi_{m1}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{m\mu^{(2)}}^{(1)} + \chi_{1s}^{(2)} D_{1,2,\ldots,m-1,m+1} + \cdots \\
& \qquad\qquad + \chi_{m^{(1)}-m,s}^{(2)} D_{1,2,\ldots,m-1,m^{(1)}}, \\
(18) \quad & x_n \Phi_{m+1,s}^{(1)} = \psi_{1s}^{(3)} \Phi_{m+1,1}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{m+1,\mu^{(2)}}^{(1)} + \chi_{1s}^{(2)} D + 0 + \cdots + 0, \\
& x_n \Phi_{m+2,s}^{(1)} = \psi_{1s}^{(2)} \Phi_{m+2,1}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{m+2,\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + \chi_{2s}^{(2)} D + \cdots + 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& x_n \Phi_{m^{(1)}s}^{(1)} = \psi_{1s}^{(2)} \Phi_{m^{(1)}1}^{(1)} + \cdots + \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \Phi_{m^{(1)}\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + 0 + \cdots + \chi_{m^{(1)}-m,s}^{(2)} D, \\
& \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu^{(2)})
\end{aligned}
$$

wo die Formen $\psi_{1s}^{(2)}, \ldots, \psi_{\mu^{(2)}s}^{(2)}$ und in Folge dessen auch die Formen $\chi_{1s}^{(2)}, \ldots, \chi_{m^{(1)}-m,s}^{(2)}$ Formen sind, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten.

Die Lösungen (14) und (17) bilden zusammengenommen ein volles Lösungssystem der ursprünglich vorgelegten Gleichung (13) und die Aufstellung der zwischen diesen Lösungen bestehenden Relationen führt zu einem Gleichungssystem von der folgenden Gestalt

$$
\begin{aligned}
& \Phi_{11}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{1\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + D_{m+1,2,\ldots,m} Y_1^{(1)} + \cdots + D_{m^{(1)},2,\ldots,m} Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \Phi_{m1}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{m\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + D_{1,2,\ldots,m-1,m+1} Y_1^{(1)} + \cdots \\
& \qquad\qquad + D_{1,2,\ldots,m-1,m^{(1)}} Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} = 0, \\
(19) \quad & \Phi_{m+1,1}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{m+1,\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + D Y_1^{(1)} + 0 + \cdots + 0 = 0, \\
& \Phi_{m+2,1}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{m+2,\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + D Y_2^{(1)} + \cdots + 0 = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \Phi_{m^{(1)}1}^{(1)} X_1^{(1)} + \cdots + \Phi_{m^{(1)}\mu^{(2)}}^{(1)} X_{\mu^{(2)}}^{(1)} + 0 + \cdots + D Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} = 0,
\end{aligned}
$$

wo $X_1^{(1)}, \ldots, X_{\mu^{(2)}}^{(1)}, Y_1^{(1)}, \ldots, Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ die zu bestimmenden Formen sind.

Hierbei ist besonders hervorzuheben, dass möglicherweise einige unter den Lösungen (14) und (17) gleich linearen Combinationen der übrigen Lösungen sind und in Folge dessen das Gleichungssystem (19) nicht in dem oben definirten und durch Theorem III geforderten Sinne aus (13) abgeleitet worden ist. Um das Gleichungssystem (19) in das aus (13) abgeleitete Gleichungssystem umzuwandeln, bedarf es also noch einer Reduction des Gleichungssystems (19), welche in der That späterhin ausgeführt werden wird.

Das Gleichungssystem (19) hat, wie aus (18) hervorgeht, die Lösungen

$$
(20)\quad
\begin{array}{l}
X_1^{(1)}=\psi_{11}^{(2)}-x_n,\ X_2^{(1)}=\psi_{21}^{(2)},\ldots,X_{\mu^{(2)}}^{(1)}=\psi_{\mu^{(2)}1}^{(2)},\ Y_1^{(1)}=\chi_{11}^{(2)},\ \ldots,\ Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}=\chi_{m^{(1)}-m,1}^{(2)},\\
X_1^{(1)}=\psi_{12}^{(2)},\ X_2^{(1)}=\psi_{22}^{(2)}-x_n,\ldots,X_{\mu^{(2)}}^{(1)}=\psi_{\mu^{(2)}2}^{(2)},\ Y_1^{(1)}=\chi_{12}^{(2)},\ \ldots,\ Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}=\chi_{m^{(1)}-m,2}^{(2)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_1^{(1)}=\psi_{1\mu^{(2)}}^{(2)},\ X_2^{(1)}=\psi_{2\mu^{(2)}}^{(2)},\ldots,X_{\mu^{(2)}}^{(1)}=\psi_{\mu^{(2)}\mu^{(2)}}^{(2)}-x_n,\ Y_1^{(1)}=\chi_{1\mu^{(2)}}^{(2)},\ \ldots,\ Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}=\chi_{m^{(1)}-m,\mu^{(2)}}^{(2)}
\end{array}
$$

Ist jetzt irgend eine Lösung $X_1^{(1)},\ldots,X_{\mu^{(2)}}^{(1)},\ Y_1^{(1)},\ldots,Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ des Gleichungssystems (19) vorgelegt, so lässt sich aus derselben durch Combination mit den Lösungen (20) eine andere Lösung

$$X_1^{(1)}=\xi_1^{(1)},\ldots,X_{\mu^{(2)}}^{(1)}=\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)},\quad Y_1^{(1)}=\mathsf{H}_1^{(1)},\ldots,Y_{m^{(1)}-m}^{(1)}=\mathsf{H}_{m^{(1)}-m}^{(1)}$$

herstellen, wo $\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)}$ Formen sind, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Setzt man diese Lösung $\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)}, \mathsf{H}_1^{(1)},\ldots,\mathsf{H}_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ in die letzten $m^{(1)}-m$ Gleichungen von (19) ein, so sieht man leicht ein, dass die Formen $\mathsf{H}_1^{(1)},\ldots,\mathsf{H}_{m^{(1)}-m}^{(1)}$ identisch Null sind und wir erhalten somit zur Bestimmung der Formen $\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)}$ die folgenden Gleichungen

$$\Phi_{t1}^{(1)}\xi_1^{(1)}+\Phi_{t2}^{(1)}\xi_2^{(1)}+\cdots+\Phi_{t\mu^{(2)}}^{(1)}\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)}=0.\quad (t=1,2,\ldots,m^{(1)})$$

Die Formen $\Phi_{t1}^{(1)}, \Phi_{t2}^{(1)},\ldots,\Phi_{t\mu^{(2)}}^{(1)}$ enthalten die Veränderliche x_n höchstens im Grade $r-1$. Wenn wir daher in den letzteren Gleichungen linker Hand die Coefficienten der Potenzen von x_n einzeln gleich Null setzen, so ergiebt sich das Gleichungssystem

$$(21)\quad \varphi_{t1}^{(1)}\xi_1^{(1)}+\varphi_{t2}^{(1)}\xi_2^{(1)}+\cdots+\varphi_{t\mu^{(2)}}^{(1)}\xi_{\mu^{(2)}}^{(1)}=0,\quad (t=1,2,\ldots,\mu^{(1)})$$

wo sowohl die Coefficienten wie die zu bestimmenden Formen lediglich die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Dieses Gleichungssystem (21) ist, wie man sieht, das aus (16) abgeleitete Gleichungssystem. Es sei nun

$$\xi_1^{(1)} = \varphi_{1s}^{(2)}, \quad \xi_2^{(1)} = \varphi_{2s}^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(2)}}^{(1)} = \varphi_{\mu^{(2)}s}^{(2)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu^{(3)})$$

ein volles Lösungssystem von (21) und zwar ein solches, in welchem keine Lösung durch lineare Combination der übrigen Lösungen erhalten werden kann.

Fassen wir die letzteren Entwickelungen zusammen, so erkennen wir, dass eine jede Lösung des Gleichungssystems (19) sich in die Gestalt

$$(22)\quad \begin{aligned}
X_1^{(1)} &= a_1^{(2)}\varphi_{11}^{(2)} + \cdots + a_{\mu^{(3)}}^{(2)}\varphi_{1\mu^{(3)}}^{(2)} + A_1^{(2)}(\psi_{11}^{(2)} - x_n) + A_2^{(2)}\psi_{12}^{(2)} + \cdots \\
&\qquad + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\psi_{1\mu^{(2)}}^{(2)}, \\
X_2^{(1)} &= a_1^{(2)}\varphi_{21}^{(2)} + \cdots + a_{\mu^{(3)}}^{(2)}\varphi_{2\mu^{(3)}}^{(2)} + A_1^{(2)}\psi_{21} + A_2^{(2)}(\psi_{22} - x_n) + \cdots \\
&\qquad + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\psi_{2\mu^{(2)}}^{(2)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_{\mu^{(2)}}^{(1)} &= a_1^{(2)}\varphi_{\mu^{(2)}1}^{(2)} + \cdots + a_{\mu^{(3)}}^{(2)}\varphi_{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}^{(2)} + A_1^{(2)}\psi_{\mu^{(2)}1}^{(2)} + A_2^{(2)}\psi_{\mu^{(2)}2}^{(2)} + \cdots \\
&\qquad + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\left(\psi_{\mu^{(2)}\mu^{(2)}}^{(2)} - x_n\right), \\
Y_1^{(1)} &= 0 + \cdots + 0 + A_1^{(2)}\chi_{11}^{(2)} + A_2^{(2)}\chi_{12}^{(2)} + \cdots \\
&\qquad + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\chi_{1\mu^{(2)}}^{(2)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} &= 0 + \cdots + 0 + A_1^{(2)}\chi_{m^{(1)}-m,1}^{(2)} + A_2^{(2)}\chi_{m^{(1)}-m,2}^{(2)} \\
&\qquad + \cdots + A_{\mu^{(2)}}^{(2)}\chi_{m^{(1)}-m,\mu^{(2)}}^{(2)},
\end{aligned}$$

bringen lässt, wo $a_1^{(2)}, \ldots, a_{\mu^{(3)}}^{(2)}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und $A_1^{(2)}, \ldots, A_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind. Insbesondere müssen daher auch die Lösungen

$$X_1^{(1)} = x_n\varphi_{1s}^{(2)}, \; X_2^{(1)} = x_n\varphi_{2s}^{(2)}, \ldots, X_{\mu^{(2)}}^{(1)} = x_n\varphi_{\mu^{(2)}s}^{(2)}, \; Y_1^{(1)} = 0, \ldots, Y_{m^{(1)}-m}^{(1)} = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots, \mu^{(3)})$$

in obiger Gestalt darstellbar sein und wir setzen dementsprechend

$$
(23)\quad
\begin{aligned}
x_n\varphi^{(2)}_{1s} &= \psi^{(3)}_{1s}\varphi^{(2)}_{11} + \cdots + \psi^{(3)}_{\mu^{(3)}s}\varphi^{(2)}_{1\mu^{(3)}} + \chi^{(3)}_{1s}(\psi^{(2)}_{11}-x_n) + \cdots + \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}\psi^{(2)}_{1\mu^{(2)}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n\varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}s} &= \psi^{(3)}_{1s}\varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}1} + \cdots + \psi^{(3)}_{\mu^{(3)}s}\varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}\mu^{(3)}} + \chi^{(3)}_{1s}\psi^{(2)}_{\mu^{(2)}1}\\
&\qquad + \cdots + \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}(\psi^{(2)}_{\mu^{(2)}\mu^{(2)}}-x_n),\\
0 &= 0 + \cdots + 0 + \chi^{(3)}_{1s}\chi^{(2)}_{11} + \cdots + \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}\chi^{(2)}_{1\mu^{(2)}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= 0 + \cdots + 0 + \chi^{(3)}_{1s}\chi^{(2)}_{m^{(1)}-m\,1} + \cdots + \chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}\chi^{(2)}_{m^{(1)}-m,\,\mu^{(2)}},\\
&(s=1,2,\ldots,\mu^{(3)}),
\end{aligned}
$$

wo die Formen $\psi^{(3)}_{1s},\ldots,\psi^{(3)}_{\mu^{(3)}s}$ und folglich auch die Formen $\chi^{(3)}_{1s},\ldots,\chi^{(3)}_{\mu^{(2)}s}$ nur die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Nach (22) bilden die Lösungen (20) zusammengenommen mit den Lösungen

$$
X^{(1)}_1=\varphi^{(2)}_{1s},\ X^{(1)}_2=\varphi^{(2)}_{2s},\ \ldots,\ X^{(1)}_{\mu^{(2)}}=\varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}s},\quad Y^{(1)}_1=0,\ \ldots,\ Y^{(1)}_{m^{(1)}-m}=0
$$
$$
(s=1,2,\ldots,\mu^{(3)})
$$

ein volles Lösungssystem von (19) und die Aufstellung der zwischen diesen Lösungen bestehenden Relationen führt zu dem Gleichungssystem

$$
(24)\quad
\begin{aligned}
&\varphi^{(2)}_{11}X^{(2)}_1 + \cdots + \varphi^{(2)}_{1\mu^{(3)}}X^{(2)}_{\mu^{(3)}} + (\psi^{(2)}_{11}-x_n)Y^{(2)}_1 + \cdots + \psi^{(2)}_{1\mu^{(2)}}Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}1}X^{(2)}_1 + \cdots + \varphi^{(2)}_{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}X^{(2)}_{\mu^{(3)}} + \psi^{(2)}_{\mu^{(2)}1}Y^{(2)}_1 + \cdots + (\psi^{(2)}_{\mu^{(2)}\mu^{(2)}}-x_n)Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = 0,\\
&0 + \cdots + 0 + \chi^{(2)}_{11}Y^{(2)}_1 + \cdots + \chi^{(2)}_{1\mu^{(2)}}Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&0 + \cdots + 0 + \chi^{(2)}_{m^{(1)}-m,1}Y^{(2)}_1 + \cdots + \chi^{(2)}_{m^{(1)}-m,\mu^{(2)}}Y^{(2)}_{\mu^{(2)}} = 0.
\end{aligned}
$$

wo $X^{(2)}_1,\ldots,X^{(2)}_{\mu^{(3)}},\ Y^{(2)}_1,\ldots,Y^{(2)}_{\mu^{(2)}}$ die zu bestimmenden Formen sind. Dieses Gleichungssystem (24) besitzt, wie aus (23) hervorgeht, die Lösungen

$$
(25)\quad
\begin{aligned}
&X^{(2)}_1=\psi^{(3)}_{11}-x_n,\ldots,\ X^{(2)}_{\mu^{(3)}}=\psi^{(3)}_{\mu^{(3)}1},\quad Y^{(2)}_1=\chi^{(3)}_{11},\ \ldots,\ Y^{(2)}_{\mu^{(2)}}=\chi^{(3)}_{\mu^{(2)}1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&X^{(2)}_1=\psi^{(3)}_{1\mu^{(3)}},\ \ldots,\ X^{(2)}_{\mu^{(3)}}=\psi^{(3)}_{\mu^{(3)}\mu^{(3)}}-x_n,\ Y^{(2)}_1=\chi^{(3)}_{1\mu^{(3)}},\ldots,\ Y^{(2)}_{\mu^{(2)}}=\chi^{(3)}_{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}.
\end{aligned}
$$

Ist jetzt irgend eine Lösung $X_1^{(2)}, \ldots, X_{\mu^{(3)}}^{(2)}$, $Y_1^{(2)}, \ldots, Y_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ des Gleichungssystems (24) vorgelegt, so lässt sich aus derselben durch Combination mit den Lösungen (25) eine andere Lösung $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}$, $\mathsf{H}_1^{(2)}, \ldots, \mathsf{H}_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ ableiten, wo $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}$ Formen sind, welche nur die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Setzt man diese Lösung $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}$, $\mathsf{H}_1^{(2)}, \ldots, \mathsf{H}_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ in die ersten $\mu^{(2)}$ Gleichungen von (24) ein, so sieht man leicht, dass die Formen $\mathsf{H}_1^{(2)}, \ldots, \mathsf{H}_{\mu^{(2)}}^{(2)}$ identisch Null sind und zur Bestimmung der Formen $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}$ erhalten wir daher die Gleichungen

$$(26)\quad \varphi_{s1}^{(2)}\xi_1^{(2)} + \varphi_{s2}^{(2)}\xi_2^{(2)} + \cdots \varphi_{s\mu^{(3)}}^{(2)}\xi_{\mu^{(3)}}^{(2)} = 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mu^{(2)})$$

wo sowohl die Coefficienten, wie die zu bestimmenden Formen lediglich die $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ enthalten. Dieses Gleichungssystem (26) ist, wie man sieht, das aus (21) abgeleitete Gleichungssystem.

Das volle System von Lösungen des Gleichungssystems (24) lässt sich zusammensetzen aus den Lösungen (25) und aus Lösungen von der Gestalt

$$X_1^{(2)} = \xi_1^{(2)}, \ldots, X_{\mu^{(3)}}^{(2)} = \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}, \quad Y_1^{(2)} = 0, \ldots, Y_{\mu^{(2)}}^{(2)} = 0,$$

wo $\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_{\mu^{(3)}}^{(2)}$ Lösungen des Gleichungssystems (26) sind.

Denken wir uns das eben beschriebene Verfahren fortgesetzt, so erhalten wir die Kette der Gleichungssysteme (13), (19), (24), ... und ferner zugleich die daneben laufende Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme (16), (21), (26) .... Diese beiden Ketten von Gleichungssystemen stehen zu einander in engster Beziehung, indem das volle System von Lösungen des π^{ten} Gleichungssystems in der Kette (13), (19), (24), ... sich zusammensetzen lässt aus den Lösungen von der Gestalt

$$(27)\quad \begin{array}{l} X_1^{(\pi-1)} = \psi_{11}^{(\pi)} - x_n, \ldots, X_{\mu^{(\pi)}}^{(\pi-1)} = \psi_{\mu^{(\pi)}1}^{(\pi)}, \quad Y_1^{(\pi-1)} = \chi_{11}^{(\pi)}, \ldots, Y_{\mu^{(\pi-1)}}^{(\pi-1)} = \chi_{\mu^{(\pi-1)}1}^{(\pi)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1^{(\pi-1)} = \psi_{1\mu^{(\pi)}}^{(\pi)}, \ldots, X_{\mu^{(\pi)}}^{(\pi-1)} = \psi_{\mu^{(\pi)}\mu^{(\pi)}}^{(\pi)} - x_n, \quad Y_1^{(\pi-1)} = \chi_{1\mu^{(\pi)}}^{(\pi)}, \ldots, \\ \qquad\qquad Y_{\mu^{(\pi-1)}}^{(\pi-1)} = \chi_{\mu^{(\pi-1)}\mu^{(\pi)}}^{(\pi)}, \end{array}$$

und den Lösungen von der Gestalt

$$X_1^{(\pi-1)} = \xi_1^{(\pi-1)}, \ldots, X_{\mu^{(\pi)}}^{(\pi-1)} = \xi_{\mu^{(\pi)}}^{(\pi-1)}, \quad Y_1^{(\pi-1)} = 0, \ldots, Y_{\mu^{(\pi-1)}}^{(\pi-1)} = 0,$$

wo $\xi_1^{(\pi-1)}, \ldots, \xi_{\mu^{(\pi)}}^{(\pi-1)}$ Lösungen des π^{ten} Gleichungssystems in der Kette (16), (21), (26), ... sind. In dem Lösungssysteme (27) bedeuten $\psi_{11}^{(\pi)}, \ldots, \psi^{(\pi)}_{\mu^{(\pi)}\mu^{(\pi)}}, \chi_{11}^{(\pi)}, \ldots, \chi^{(\pi)}_{\mu^{(\pi-1)}\mu^{(\pi)}}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und zwischen diesen Lösungen (27) für sich allein besteht, wie man leicht erkennt, keine Relation, d. h. das Gleichungssystem

$$(28)\quad \begin{array}{lllll}
(\psi_{11}^{(\pi)} - x_n)\, Y_1^{(\pi)} & + \cdots + & \psi^{(\pi)}_{1\mu^{(\pi)}} & Y^{(\pi)}_{\mu^{(\pi)}} & = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\
\psi^{(\pi)}_{\mu^{(\pi)}1} \quad Y_1^{(\pi)} & + \cdots + & \left(\psi^{(\pi)}_{\mu^{(\pi)}\mu^{(\pi)}} - x_n\right) & Y^{(\pi)}_{\mu^{(\pi)}} & = 0, \\
\chi_{11}^{(\pi)} \quad Y_1^{(\pi)} & + \cdots + & \chi^{(\pi)}_{1\mu^{(\pi)}} & Y^{(\pi)}_{\mu^{(\pi)}} & = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \\
\chi^{(\pi)}_{\mu^{(\pi-1)}1} \quad Y_1^{(\pi)} & + \cdots + & \chi^{(\pi)}_{\mu^{(\pi-1)}\mu^{(\pi)}} & Y^{(\pi)}_{\mu^{(\pi)}} & = 0
\end{array}$$

besitzt keine Lösung.

In den Gleichungssystemen (16), (21), (26), ... der zweiten Kette handelt es sich lediglich um Formen, welche von der Veränderlichen x_n frei sind. Nehmen wir daher an, das zu beweisende Theorem III sei bereits für den Fall von $n-1$ Veränderlichen als richtig erkannt, so folgt, dass in der Kette (16), (21), (26), ... spätestens an $n-1^{\text{ster}}$ Stelle ein Gleichungssystem auftritt, welches keine Lösung besitzt. In Folge dieses Umstandes muss in der Kette (13), (19), (24), ... spätestens an $n-1^{\text{ster}}$ Stelle ein Gleichungssystem auftreten, dessen volles Lösungssystem durch die Lösungen von der Gestalt (27) erschöpft wird; es ist dann das unmittelbar auf dieses folgende Gleichungssystem d. h. spätestens das n^{te} Gleichungssystem der Kette (13), (19), (24), ... von der Gestalt (28) und dieses Gleichungssystem lässt seinerseits keine Lösung mehr zu. Wir haben somit, unter der Annahme der Richtigkeit des Theorems III für $n-1$ Veränderliche, gezeigt, dass die Kette der Gleichungssysteme (13), (19), (24), ... spätestens mit dem n^{ten} Gleichungssysteme abbricht.

In der Kette der Gleichungssysteme (13), (19), (24), ... wird allgemein das π^{te} Gleichungssystem dadurch erhalten, dass man für das $(\pi-1)^{\text{ste}}$ Gleichungssystem in der oben beschriebenen Weise ein volles System von Lösungen bildet und dann die unbestimmten linearen Combinationen dieser Lösungen gleich Null setzt. Da nun im Allgemeinen das bei unserem Verfahren sich ergebende volle Lösungssystem ein solches sein wird, in welchem einige Lösungen lineare Combinationen der übrigen sind, so ist das π^{te} Gleichungssystem der Kette (13), (19), (24), ... nicht nothwendig zugleich dasjenige Gleichungssystem, welches man erhält, wenn man aus dem $(\pi-1)^{\text{sten}}$

Gleichungssysteme in dem von uns definirten und in Theorem III geforderten Sinne das **abgeleitete** Gleichungssystem bildet. Aber es bietet keine Schwierigkeit aus der gefundenen Kette (13), (19), (24), ... die Kette der aus (13) abgeleiteten Gleichungssysteme zu gewinnen, da wir hierzu offenbar nur nöthig haben, in den Gleichungssystemen der Kette (13), (19), (24), ... alle diejenigen Formensysteme zu unterdrücken oder durch lineare Combinationen der anderen Formensysteme zu ersetzen, welche lediglich durch eben jene überflüssigen Lösungen bedingt sind. Diese Ueberlegung lehrt zugleich, dass die Zahl der Gleichungen und der unbestimmten Formen in den Gleichungssystemen jener Kette (13), (19), (24), ... jedenfalls nicht vermehrt zu werden braucht, damit aus dieser Kette (13), (19), (24), ... die Kette der aus (13) **abgeleiteten** Gleichungssysteme entstehe und da die Kette (13), (19), (24), ... den obigen Entwickelungen zufolge spätestens mit dem n^{ten} Gleichungssysteme abbricht, so hat die Kette der aus (13) **abgeleiteten** Gleichungssysteme umsomehr diese Eigenschaft. Damit ist unser Theorem III für Formen von n Veränderlichen bewiesen, unter der Voraussetzung, dass dasselbe für den Fall von $n-1$ Veränderlichen gilt.

Um zu zeigen, dass Theorem III für den Fall $n=2$ richtig ist, nehmen wir an, es sei ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$(29)\qquad F_{t1}X_1+F_{t2}X_2+\cdots+F_{tm^{(1)}}X_{m^{(1)}}=0\qquad (t=1,2,\ldots,m)$$

vorgelegt, wo $F_{t1}, F_{t2}, \ldots, F_{tm^{(1)}}$ binäre Formen der Veränderlichen x_1, x_2 sind und es sei ferner

$$X_1=F_{1s}^{(1)},\quad X_2=F_{2s}^{(1)},\ldots, X_{m^{(1)}}=F_{m^{(1)}s}^{(1)}\qquad (s=1,2,\ldots,m^{(2)})$$

ein volles Lösungssystem von (29) derart, dass keine in demselben enthaltene Lösung eine lineare Combination der übrigen Lösungen ist. Das aus (29) abgeleitete Gleichungssystem nimmt dann die Gestalt an

$$(30)\qquad F_{t1}^{(1)}X_1^{(1)}+F_{t2}^{(1)}X_2^{(1)}+\cdots+F_{tm^{(2)}}^{(1)}X_{m^{(2)}}^{(1)}=0\qquad (t=1,2,\ldots,m^{(1)})$$

und es ist zu zeigen, dass dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzt. Zu dem Zwecke nehmen wir das Gegentheil an und verstehen unter $X_1^{(1)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_{m^{(2)}}^{(1)}$ binäre Formen beziehungsweise von den Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_{m^{(2)}}$, welche jenes Gleichungssystem (30) befriedigen. Ueberdies mögen diese Formen $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_{m^{(2)}}^{(1)}$ in eine solche Reihenfolge gebracht sein, dass

$$r_1\leqq r_2\leqq r_3\leqq\cdots\leqq r_{m^{(2)}}$$

wird und es sei endlich l eine binäre Linearform, welche nicht in

$x_1 X_1^{(1)}$ als Theiler enthalten ist. Bestimmen wir jetzt die Constanten $c_2, c_3, \ldots, c_{m^{(2)}}$ derart, dass die Formen

$$Y_s^{(1)} = X_s^{(1)} + c_s x_1^{r_s - r_1} X_1^{(1)} \qquad (s = 2, 3, \ldots, m^{(2)})$$

sämmtlich durch l theilbar werden und setzen wir dann

$$(31) \quad G_{t1}^{(1)} = F_{t1}^{(1)} - c_2 x_1^{r_2 - r_1} F_{t2}^{(1)} - c_3 x_1^{r_3 - r_1} F_{t3}^{(1)} - \cdots - c_{m^{(2)}} x^{r_{m^{(2)}} - r_1} F_{tm^{(2)}}^{(1)}, \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

so ist

$$G_{t1}^{(1)} X_1^{(1)} + F_{t2}^{(1)} Y_2^{(1)} + F_{t3}^{(1)} Y_3^{(1)} + \cdots + F_{tm^{(2)}}^{(1)} Y_{m^{(2)}}^{(1)} = 0$$
$$(t = 1, 2, \cdots, m^{(1)})$$

und hieraus folgt, dass die Formen $G_{t1}^{(1)}$ sämmtlich durch l theilbar sind. Wir setzen dementsprechend

$$(32) \qquad G_{t1}^{(1)} = l H_{t1}^{(1)}. \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

Es genügen nun die Formen

$$X_1 = G_{11}^{(1)}, \quad X_2 = G_{21}^{(1)}, \ldots, X_{m^{(1)}} = G_{m^{(1)}1}^{(1)}$$

und demnach auch die Formen

$$X_1 = H_{11}^{(1)}, \quad X_2 = H_{21}^{(1)}, \ldots, X_{m^{(1)}} = H_{m^{(1)}1}^{(1)}$$

dem ursprünglich vorgelegten Gleichungssysteme (29), woraus insbesondere folgt, dass auch die letztere Lösung durch lineare Combination der obigen $m^{(2)}$ Lösungen erhalten werden kann und da die Formen $H_{t1}^{(1)}$ beziehungsweise von niederen Ordnungen sind als die Formen $F_{t1}^{(1)}$, so ergeben sich folgende Formeln

$$H_{t1}^{(1)} = A_2 F_{t2}^{(1)} + A_3 F_{t3}^{(1)} + \cdots + A_{m^{(2)}} F_{tm^{(2)}}, \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

wo $A_2, A_3, \ldots, A_{m^{(2)}}$ gewisse binäre Formen bedeuten. Aus diesen Formeln und den Formeln (31) und (32) erhalten wir unmittelbar:

$$F_{t1}^{(1)} = A_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + A_3^{(1)} F_{t3}^{(1)} + \cdots + A_{m^{(2)}}^{(1)} F_{tm^{(2)}}^{(1)}, \quad (t = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

wo $A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, \ldots, A_{m^2}^{(1)}$ gewisse andere binäre Formen sind d. h. unter jenen $m^{(2)}$ Lösungen ist die erste Lösung eine lineare Combination der übrigen Lösungen. Dieser Umstand ist mit der vorhin gemachten Festsetzung in Widerspruch und unsere Annahme, dass das Gleichungssystem (30) eine Lösung besitze, ist somit als unzulässig erkannt. Damit ist das Theorem III für binäre Formen und folglich auch zugleich allgemein bewiesen.

Es wurde bereits oben dargelegt, inwiefern die Formen eines vollen und keine überflüssigen Lösungen enthaltenden Lösungssystems durch das gegebene Gleichungssystem festgelegt sind. Offenbar ist in entsprechendem Sinne auch die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme eine wesentlich bestimmte.

Was insbesondere die Untersuchung eines Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ anbetrifft, so legen wir dabei die folgende aus den Formen des Moduls zu bildende Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = 0$$

als erstes Gleichungssystem zu Grunde und die Aufstellung der Kette der hieraus abgeleiteten Gleichungssysteme gewährt dann, wie später näher ausgeführt werden wird, einen weitreichenden Einblick in das algebraische Gefüge jenes Moduls.

Zur Erläuterung unserer allgemeinen Entwickelungen mögen folgende Beispiele dienen. Der bereits oben in Abschnitt I behandelte aus den 3 quadratischen Formen

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1 x_3 - x_2^2, \\ F_2 &= x_2 x_3 - x_1 x_4, \\ F_3 &= x_2 x_4 - x_3^2 \end{aligned}$$

gebildete Modul (F_1, F_2, F_3) führt zu der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3 = 0.$$

Wie oben bewiesen wurde, lässt sich eine jede Lösung dieser Gleichung in die Gestalt

$$\begin{aligned} X_1 &= x_3 Y_1 + x_4 Y_2, \\ X_2 &= x_2 Y_1 + x_3 Y_2, \\ X_3 &= x_1 Y_1 + x_2 Y_2 \end{aligned}$$

bringen, wo Y_1, Y_2 quaternäre Formen sind. Es entsteht somit das abgeleitete Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_3 Y_1 + x_4 Y_2 &= 0, \\ x_2 Y_1 + x_3 Y_2 &= 0, \\ x_1 Y_1 + x_2 Y_2 &= 0, \end{aligned}$$

welches seinerseits keine Lösung mehr zulässt. Die Kette bricht also in diesem Falle bereits bei dem 2^{ten} Gleichungssysteme ab.

Als zweites Beispiel diene der Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_6)$, wo $F_1, F_2, \ldots, F_6$ die ebenfalls bereits in Abschnitt I behandelten Formen von der zweiten Ordnung in den 5 Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_5$ bedeuten. Die Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_6 X_6 = 0$$

besitzt die dort angegebenen 8 Lösungen und von diesen ist keine gleich einer linearen Combination der übrigen Lösungen, während jede andere Lösung dieser Gleichung sich aus jenen 8 Lösungen zusammensetzen lässt. Die allgemeine Lösung der vorgelegten Gleichung ist daher

$$\begin{aligned}
X_1 &= x_3 Y_1 + x_4 Y_2 + x_5 Y_3 \\
X_2 &= -x_2 Y_1 - x_3 Y_2 + x_3 Y_4 + x_4 Y_5 + x_5 Y_6 \\
X_3 &= -x_1 Y_1 - x_2 Y_2 - x_3 Y_3 - x_3 Y_5 - x_4 Y_6 + x_4 Y_7 + x_5 Y_8 \\
X_4 &= x_1 Y_1 + x_2 Y_2 - x_2 Y_4 - x_4 Y_7 - x_5 Y_8 \\
X_5 &= x_2 Y_3 + x_1 Y_4 + x_3 Y_7 + x_4 Y_8 \\
X_6 &= + x_1 Y_5 + x_2 Y_6 - x_2 Y_7 - x_3 Y_8,
\end{aligned}$$

wo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_8$ beliebige Formen sind. Wir erhalten somit das abgeleitete Gleichungssystem, wenn wir in den eben gewonnenen Formeln die Ausdrücke auf der rechten Seite gleich Null setzen und dieses abgeleitete Gleichungssystem seinerseits besitzt die folgenden 3 Lösungen

$$\begin{array}{llllll}
Y_1 = x_4, & Y_2 = -x_3, & Y_3 = 0, & Y_4 = -x_3, & Y_5 = x_2, & Y_6 = 0, \\
 & & & & Y_7 = x_1, & Y_8 = 0, \\
Y_1 = x_5, & Y_2 = 0, & Y_3 = -x_3, & Y_4 = -x_4, & Y_5 = x_3, & Y_6 = x_2, \\
 & & & & Y_7 = x_2, & Y_8 = x_1, \\
Y_1 = 0, & Y_2 = x_5, & Y_3 = -x_4, & Y_4 = 0, & Y_5 = 0, & Y_6 = x_3, \\
 & & & & Y_7 = 0, & Y_8 = x_2.
\end{array}$$

Aus denselben lässt sich jede andere Lösung jenes abgeleiteten Gleichungssystems zusammensetzen und das nächste abgeleitete Gleichungssystem lautet daher

$$\begin{aligned}
x_4 Z_1 + x_5 Z_2 &= 0, \\
-x_3 Z_1 + x_5 Z_3 &= 0, \\
-x_3 Z_2 - x_4 Z_3 &= 0, \\
-x_3 Z_1 - x_4 Z_2 &= 0, \\
x_2 Z_1 + x_3 Z_2 &= 0, \\
x_2 Z_2 + x_3 Z_3 &= 0, \\
x_1 Z_1 + x_2 Z_2 &= 0, \\
x_1 Z_2 + x_2 Z_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lässt keine Lösung zu und die aus dem vorgelegten Modul entstehende Kette bricht also bei dem 3ten Gleichungssysteme ab.

Um ein allgemeineres Beispiel zu behandeln, betrachten wir den Modul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und beweisen für diesen Modul den folgenden Satz:

Wird für die Gleichung

$$(33) \qquad x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_n X_n = 0$$

die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme aufgestellt, so besteht allgemein das s^{te} *Gleichungssystem dieser Kette aus* $\binom{n}{s-1}$ *Gleichungen, während für dasselbe die Zahl der zu bestimmenden Formen gleich* $\binom{n}{s}$ *und die Zahl der Lösungen des vollen Lösungssystems gleich* $\binom{n}{s+1}$ *ist. Die Coefficienten der abgeleiteten Gleichungen sind sämmtlich lineare Formen.*

Wir können diesen Satz für die niederen Fälle ohne Schwierigkeit durch directe Aufstellung der abgeleiteten Gleichungssysteme bestätigen. Was beispielsweise den Fall $n=4$ anbetrifft, so besitzt das Gleichungssystem

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = 0$$

die 6 Lösungen

$$\begin{array}{llll}
X_1 = x_2, & X_2 = -x_1, & X_3 = 0, & X_4 = 0, \\
X_1 = x_3, & X_2 = 0, & X_3 = -x_1, & X_4 = 0, \\
X_1 = x_4, & X_2 = 0, & X_3 = 0, & X_4 = -x_1, \\
X_1 = 0, & X_2 = x_3, & X_3 = -x_2, & X_4 = 0, \\
X_1 = 0, & X_2 = x_4, & X_3 = 0, & X_4 = -x_2, \\
X_1 = 0, & X_2 = 0, & X_3 = x_4, & X_4 = -x_3
\end{array}$$

und das abgeleitete Gleichungssystem lautet daher

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x_2 Y_1 & + x_3 Y_2 & + x_4 Y_3 & & & & = 0, \\
-x_1 Y_1 & & & + x_3 Y_4 & + x_4 Y_5 & & = 0, \\
& -x_1 Y_2 & & - x_2 Y_4 & & + x_4 Y_6 & = 0, \\
& & -x_1 Y_3 & & - x_2 Y_5 & - x_3 Y_6 & = 0.
\end{array}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind

$$\begin{array}{llll}
Y_1 = x_3, & Y_2 = -x_2, & Y_3 = 0, & Y_4 = x_1, \\
& & Y_5 = 0, & Y_6 = 0, \\
Y_1 = -x_4, & Y_2 = 0, & Y_3 = x_2, & Y_4 = 0, \\
& & Y_5 = -x_1, & Y_6 = 0, \\
Y_1 = 0, & Y_2 = x_4, & Y_3 = -x_3, & Y_4 = 0, \\
& & Y_5 = 0, & Y_6 = x_1, \\
Y_1 = 0, & Y_2 = 0, & Y_3 = 0, & Y_4 = -x_4, \\
& & Y_5 = x_3, & Y_6 = -x_2.
\end{array}$$

Hieraus ergiebt sich das dritte Gleichungssystem der Kette in der Gestalt

$$
\begin{aligned}
x_3 Z_1 - x_4 Z_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0, \\
-x_2 Z_1 \qquad\quad + x_4 Z_3 \qquad\quad &= 0, \\
+ x_2 Z_2 - x_3 Z_3 \qquad\quad &= 0, \\
x_1 Z_1 \qquad\qquad\qquad - x_4 Z_4 &= 0, \\
- x_1 Z_2 \qquad\quad - x_3 Z_4 &= 0, \\
+ x_1 Z_3 - x_2 Z_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Da dieses Gleichungssystem nur die eine Lösung

$$Z_1 = x_4, \quad Z_2 = x_3, \quad Z_3 = x_2, \quad Z_4 = x_1$$

besitzt, so erhält das 4^te Gleichungssystem der Kette die Gestalt

$$
\begin{aligned}
x_4 U_1 &= 0, \\
x_3 U_1 &= 0, \\
x_2 U_1 &= 0, \\
x_1 U_1 &= 0
\end{aligned}
$$

und dieses Gleichungssystem lässt offenbar keine Lösung zu. Die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme bricht also erst beim 4^ten Gleichungssysteme ab.

Um den Satz allgemein zu beweisen, folgen wir dem Gedankengange, welcher dem Beweise des Theorems III zu Grunde liegt. Die Gleichung (33) lässt insbesondere die folgenden $n-1$ Lösungen zu

$$
\begin{array}{lllllll}
X_1 = x_n, & X_2 = 0, & X_3 = 0, & \cdots, & X_{n-1} = 0, & X_n = -x_1, \\
X_1 = 0, & X_2 = x_n, & X_3 = 0, & \cdots, & X_{n-1} = 0, & X_n = -x_2, \\
X_1 = 0, & X_2 = 0, & X_3 = x_n, & \cdots, & X_{n-1} = 0, & X_n = -x_3, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
X_1 = 0, & X_2 = 0, & X_3 = 0, & \cdots, & X_{n-1} = x_n, & X_n = -x_{n-1}.
\end{array}
$$

Wir nehmen nun eine beliebige Lösung $X_1, X_2, \ldots, X_n$ der Gleichung (33) an und formen dann dieselbe durch geeignete Combination mit den eben angegebenen $n-1$ besonderen Lösungen derart um, dass an Stelle der Formen $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ solche Formen treten, welche die Veränderliche x_n nicht enthalten. Da in der Gleichung (33) die Form X_n mit der Veränderlichen x_n multiplicirt erscheint, so wird nach dieser Umformung die an Stelle von X_n tretende Form nothwendig identisch gleich Null. Wir nehmen jetzt unseren Satz für den Fall von $n-1$ Veränderlichen als bewiesen an und schliessen aus demselben, dass die Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_{n-1} X_{n-1} = 0 \tag{34}$$

genau $\binom{n-1}{2}$ Lösungen besitzt, von denen keine eine lineare Combination der übrigen Lösungen ist und durch welche jede andere Lösung sich zusammensetzen lässt. Da überdies nach jenem Satze die

Lösungen sämmtlich lineare Formen sein sollen, so erhält die allgemeinste Lösung von (34) die Gestalt

$$\begin{aligned}
X_1 &= l_{11} \quad y_1 + l_{12} \quad y_2 + \cdots + l_{1\binom{n-1}{2}} \quad y_{\binom{n-1}{2}},\\
X_2 &= l_{21} \quad y_1 + l_{22} \quad y_2 + \cdots + l_{2\binom{n-1}{2}} \quad y_{\binom{n-1}{2}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_{n-1} &= l_{n-1,1}\, y_1 + l_{n-1,2}\, y_2 + \cdots + l_{n-1\binom{n-1}{2}}\, y_{\binom{n-1}{2}},
\end{aligned}$$

wo $l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{n-1\binom{n-1}{2}}$ lineare Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ und $y_1, y_2, \ldots, y_{\binom{n-1}{2}}$ beliebige Formen der nämlichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bedeuten. Aus den bisherigen Ueberlegungen erkennen wir, dass eine jede Lösung der ursprünglich vorgelegten Gleichung (33) sich in die Gestalt

$$\begin{aligned}
X_1 &= \quad x_n Y_1 + \quad 0 \quad + \cdots + l_{11} y_1 + \cdots + l_{1\binom{n-1}{2}}\, y_{\binom{n-1}{2}},\\
X_2 &= \quad 0 \quad + x_n Y_2 + \cdots + l_{21} y_1 + \cdots + l_{2\binom{n-1}{2}}\, y_{\binom{n-1}{2}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_n &= -x_1 Y_1 - x_2 Y_2 - \cdots + \quad 0 \quad + \cdots + \quad 0
\end{aligned}$$

bringen lässt, wo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und wo $y_1, \ldots, y_{\binom{n-1}{2}}$ Formen der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bedeuten. Da überdies keine der verwendeten besonderen Lösungen einer linearen Combination der übrigen Lösungen gleich ist, so ist in Uebereinstimmung mit dem obigen Satze die Gesammtzahl der in Betracht kommenden Lösungen von (33) gleich $n-1+\binom{n-1}{2}$ d. h. gleich $\binom{n}{2}$ und das aus (33) abgeleitete Gleichungssystem erhält die Gestalt

$$(35)\qquad \begin{aligned}
&x_n Y_1 \qquad\qquad \cdots + l_{11} Y_n + \cdots + l_{1\binom{n-1}{2}}\, Y_{\binom{n}{2}} = 0,\\
&\qquad\quad x_n Y_2 + \cdots + l_{21} Y_n + \cdots + l_{2\binom{n-1}{2}}\, Y_{\binom{n}{2}} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-x_1 Y_1 - x_2 Y_2 - \cdots + \quad 0 \quad + \cdots + \qquad 0 \qquad = 0.
\end{aligned}$$

Um das nächste abgeleitete Gleichungssystem aufzustellen, berücksichtigen wir, dass das abgeleitete Gleichungssystem (35) die folgenden Lösungen zulässt

$$\begin{array}{llll}
Y_1 = l_{11}, & Y_2 = l_{21}, & \ldots, Y_{n-1} = l_{n-1,1}, & Y_n = -x_n, \\
& & Y_{n+1} = 0, \quad \ldots, & Y_{\binom{n}{2}} = 0, \\
Y_1 = l_{12}, & Y_2 = l_{22}, & \ldots, Y_{n-1} = l_{n-1,2}, & Y_n = 0, \\
& & Y_{n+1} = -x_n, \ldots, & Y_{\binom{n}{2}} = 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
Y_1 = l_{1\binom{n-1}{2}}, & Y_2 = l_{2\binom{n-1}{2}}, & \ldots, Y_{n-1} = l_{n-1\binom{n-1}{2}}, & Y_n = 0, \\
& & Y_{n+1} = 0, \quad \ldots, & Y_{\binom{n}{2}} = -x_n.
\end{array}$$

Auf Grund derjenigen Betrachtungen, wie sie früher beim Beweise des Theorems III angewandt wurden, erkennt man leicht, dass sich eine jede Lösung von (35) aus den eben angegebenen $\binom{n-1}{2}$ Lösungen und aus den Lösungen

$$Y_1 = 0, \ldots, Y_{n-1} = 0, \quad Y_n = y_1, \quad Y_{n+1} = y_2, \ldots, Y_{\binom{n}{2}} = y_{\binom{n-1}{2}}$$

zusammensetzen lässt, wo $y_1, y_2, \ldots, y_{\binom{n-1}{2}}$ Lösungen des Gleichungssystems

$$l_{s1} y_1 + l_{s2} y_2 + \cdots + l_{s\binom{n-1}{2}} y_{\binom{n-1}{2}} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sind.

Das letztere Gleichungssystem ist das aus (34) abgeleitete Gleichungssystem und besitzt daher unserem Satze zufolge genau $\binom{n-1}{3}$ Lösungen, von denen keine eine lineare Combination der übrigen Lösungen ist und aus denen jede andere Lösung sich linear zusammensetzen lässt. Die Gesammtzahl der in Betracht kommenden Lösungen des aus (33) abgeleiteten Gleichungssystems (35) ist daher gleich $\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}$ d. h. gleich $\binom{n}{3}$, was wiederum mit unserem Satze übereinstimmt. Fahren wir mit dieser Schlussweise fort, so folgt die Richtigkeit unseres Satzes für n Veränderliche unter der Voraussetzung, dass derselbe für $n-1$ Veränderliche gilt. Da der Satz für $n = 2$ unmittelbar einleuchtet, so ist derselbe allgemein gültig.

Die eben durchgeführte Untersuchung der Gleichung (33) *ist vornehmlich desshalb von* ***principieller Bedeutung****, weil dieselbe einen Beleg dafür giebt, dass thatsächlich der Fall vorkommt, wo die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme nicht früher als nach dem* n^{ten} *Gleichungssysteme abbricht.*

IV.

Die charakteristische Function eines Moduls.

Die Entwickelungen des vorigen Abschnittes ermöglichen die Bestimmung der Anzahl derjenigen Bedingungen, denen die Coefficienten einer Form genügen müssen, damit dieselbe nach einem vorgelegten Modul der Null congruent sei. Um dies einzusehen, betrachten wir den Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$, wo $F_1, F_2, \ldots, F_m$ homogene Formen beziehungsweise von den Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_m$ in den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten und fragen zunächst, wie viele linear von einander unabhängige Formen F von der R^{ten} Ordnung es giebt, welche nach jenem Modul der Null congruent sind. Aus dem Ansatze

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m,$$

wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Formen beziehungsweise von den Ordnungen $R - r_1, R - r_2, \ldots, R - r_m$ sind, und aus den entsprechenden Ausführungen zu Anfang des vorigen Abschnittes erkennen wir, dass jene gesuchte Anzahl gleich ist der Gesammtzahl der Coefficienten der Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$, vermindert um die Zahl derjenigen linear unabhängigen Lösungssysteme der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = 0, \tag{36}$$

für welche $X_1, X_2, \ldots, X_m$ beziehungsweise Formen von den Ordnungen $R - r_1, R - r_2, \ldots, R - r_m$ sind. Nach den Entwickelungen am Schlusse des Abschnittes I setzt sich eine jede Lösung dieser Gleichung (36) aus einer endlichen Anzahl von Lösungen mit Hülfe der Formeln

$$X_t = A_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + A_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \cdots + A_{m^{(1)}}^{(1)} F_{t m^{(1)}}^{(1)} \qquad (t = 1, 2, \ldots, m)$$

zusammen. Bezeichnen wir die Ordnungen der Formen $F_{11}^{(1)}, F_{12}^{(1)}, \ldots, F_{1 m^{(1)}}^{(1)}$ beziehungsweise mit $r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \ldots, r_{m^{(1)}}^{(1)}$, so sind $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m^{(1)}}^{(1)}$ Formen beziehungsweise von den Ordnungen $R - r_1 - r_1^{(1)}, R - r_1 - r_2^{(1)}, \ldots R - r_1 - r_{m^{(1)}}^{(1)}$. Wir erhalten daher die verlangte Anzahl der linear unabhängigen Lösungssysteme der Gleichung (36), wenn wir die Gesammtzahl der in den Formen $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_{m^{(1)}}^{(1)}$ auftretenden Coefficienten um diejenige Zahl vermindern, welche angiebt, wie viel linear unabhängige Systeme von Formen $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_{m^{(1)}}^{(1)}$ von den Ordnungen beziehungsweise $R - r_1 - r_1^{(1)}, R - r_1 - r_2^{(1)}, \ldots, R - r_1 - r_{m^{(1)}}^{(1)}$ den Gleichungen

$$X_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + X_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \cdots + X_{m^{(1)}}^{(1)} F_{t m^{(1)}}^{(1)} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, m) \tag{37}$$

genügen. Zur Bestimmung dieser letzteren Zahl haben wir in entsprechender Weise zu berücksichtigen, dass die sämmtlichen Lösungen von (37) durch lineare Combination einer gewissen endlichen Anzahl derselben erhalten werden können.. Es ist daher ersichtlich, dass jene gesuchte Zahl sich ergiebt, wenn man die Anzahl der in den betreffenden Formen auftretenden Coefficienten um die Zahl der linear unabhängigen Lösungen des aus (37) abgeleiteten Gleichungssystems vermindert. Dieses Verfahren hat man in entsprechender Weise fortzusetzen, bis die Kette der aus (36) abgeleiteten Gleichungssysteme abbricht. Ist nun die Ordnung R der Form F so gross gewählt, dass die bei diesem Verfahren auftretenden Zahlen $R-r_1$, $R-r_2, \ldots,$ $R-r_m$, $R-r_1-r_1^{(1)}$, $R-r_1-r_2^{(1)}$, $\ldots$, $R-r_1-r^{(1)}_{m^{(1)}}$, $\ldots$ sämmtlich positiv bleiben, so lassen sich alle jene Anzahlen mit Hülfe ganzzahliger Coefficienten aus denjenigen Zahlen zusammensetzen, welche angeben, wie viele Glieder die allgemeinen Formen von den Ordnungen $R-r_1$, $R-r_2, \ldots, R-r_m$, $R-r_1-r_1^{(1)}$, $R-r_1-r_2^{(1)}, \ldots$ $R-r_1-r^{(1)}_{m^{(1)}}, \ldots$ enthalten. Die letzteren Zahlen werden durch die Ausdrücke

$$\frac{(R-r_1+1)(R-r_1+2)\ldots(R-r_1+n-1)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}, \ldots,$$

$$\frac{(R-r_m+1)(R-r_m+2)\ldots(R-r_m+n-1)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}, \ldots,$$

$$\frac{(R-r_1-r_1^{(1)}+1)(R-r_1-r_1^{(1)}+2)\ldots(R-r_1-r_1^{(1)}+n-1)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}, \ldots,$$

$$\frac{\left(R-r_1-r^{(1)}_{m^{(1)}}+1\right)\left(R-r_1-r^{(1)}_{m^{(1)}}+2\right)\cdots\left(R-r_1-r^{(1)}_{m^{(1)}}+n-1\right)}{1\,.\,2\ldots(n-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gegeben und sind daher ganze rationale Functionen vom $n-1^{\text{ten}}$ Grade in Bezug auf R. In Folge dieses Umstandes ist somit auch die Zahl der nach dem vorgelegten Modul der Null congruenten Formen für genügend grosse Werthe von R gleich einer ganzen rationalen Function von R, deren Coefficienten bestimmte, nur von dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ abhängige rationale Zahlen sind. Subtrahiren wir diese Zahl von der Zahl der Glieder einer allgemeinen Form der Ordnung R, so erhalten wir die Zahl der von einander unabhängigen Bedingungen, welchen die Coefficienten einer Form der R^{ten} Ordnung genügen müssen, damit dieselbe nach dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null congruent sei. Die so definirte Zahl ist daher ebenfalls für genügend grosse Werthe von R gleich einer ganzen rationalen Function von R mit rationalen Zahlencoefficienten. Wir bezeichnen diese ganze Function mit $\chi(R)$ und nennen dieselbe die charakteristische

Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$. *Der eben geführte Nachweis der Existenz der charakteristischen Function stützt sich auf die Endlichkeit der Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme und beruht daher wesentlich auf dem Theorem III des vorigen Abschnittes.*

Was die Grenze anbetrifft, oberhalb welcher die charakteristische Function $\chi(R)$ die in Rede stehende Anzahl von Bedingungen darstellt, so zeigen die obigen Entwickelungen unmittelbar, wie dieselbe aus den Ordnungen derjenigen Formen zu berechnen ist, welche in der Kette der aus (36) abgeleiteten Gleichungssysteme als Lösungen auftreten.

Das eben gewonnene Ergebniss lässt sich offenbar auch in folgender Weise aussprechen: Wenn wir allgemein mit c_R die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen bezeichnen, denen eine Form von der Ordnung R genügen muss, damit dieselbe nach dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null congruent sei, so ist die unendliche Zahlenreihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ von einem gewissen Elemente an eine arithmetische Reihe von einer unterhalb der Zahl n liegenden Ordnung. In der That ist für genügend grosse Werthe von R jederzeit

$$c_R = \chi(R).$$

Die letztere Ueberlegung begründet zugleich eine Eintheilung der Moduln, indem wir alle diejenigen Moduln zu der nämlichen Classe rechnen, für welche jene Zahlenreihen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ elementweise genau übereinstimmen.

Um die allgemeine Gestalt der charakteristischen Function zu ermitteln, setzen wir

$$\chi(R) = \frac{a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_d R^d}{a},$$

wo $a, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d$ ganze positive oder negative Zahlen sind und der Grad d jedenfalls kleiner ist als die Zahl n der in den gegebenen Formen auftretenden Veränderlichen. Gemäss der Bedeutung der charakteristischen Function erhält $\chi(R)$ für alle ganzzahligen oberhalb einer bestimmten Grenze liegenden Argumente R stets ganzzahlige Werthe und hieraus lässt sich beweisen, dass $\chi(R)$ überhaupt für alle ganzzahligen Argumente ganzzahlige Werthe annimmt. Denn gäbe es eine ganze Zahl r, für welche der Ausdruck

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_d r^d$$

nicht durch den Nenner a theilbar wäre, so wäre auch der Ausdruck

$$a_0 + a_1(r + ka) + a_2(r + ka)^2 + \cdots + a_d(r + ka)^d,$$

für beliebige ganzzahlige Werthe von k nicht durch a theilbar und folglich wäre auch $\chi(r + ka)$ eine gebrochene Zahl. Hierin liegt ein Widerspruch, sobald wir k so bestimmt denken, dass $r + ka$ jene

Grenze überschreitet, oberhalb welcher $\chi(R)$ nothwendig eine ganze Zahl wird.

Nachdem dies erkannt ist, setzen wir

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1\binom{R}{1} + \chi_2\binom{R}{2} + \cdots + \chi_d\binom{R}{d},$$

wo in üblicher Weise

$$\binom{R}{s} = \frac{R(R-1)\ldots(R-s+1)}{1.2\ldots s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, d)$$

bedeutet. Da den obigen Ausführungen zufolge $\chi(R)$ insbesondere auch für $R = 0$ eine ganze Zahl ergiebt, so ist χ_0 eine ganze Zahl und in entsprechender Weise erkennen wir der Reihe nach durch Einsetzen der Werthe $R = 1, 2, \ldots, d$, dass auch die anderen Coefficienten $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d$ ganze Zahlen sind. Da umgekehrt allgemein der Binomialcoefficient $\binom{R}{s}$ für alle ganzzahligen Werthe von R eine ganze Zahl wird, so ist der obige Ausdruck, falls man unter $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d$ ganze Zahlen versteht, die allgemeinste ganze rationale Function von der Beschaffenheit, dass sie für alle ganzzahligen Argumente selber ganzzahlige Werthe annimmt.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnittes fassen wir in dem folgenden Theoreme zusammen:

Theorem IV. *Die Zahl der von einander unabhängigen linearen Bedingungen, denen die Coefficienten einer Form von der Ordnung R genügen müssen, damit dieselbe nach einem vorgelegten Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null congruent sei, wird, falls R oberhalb einer bestimmten Grenze liegt, durch die Formel*

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1\binom{R}{1} + \chi_2\binom{R}{2} + \cdots + \chi_d\binom{R}{d}$$

dargestellt, wo $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_d$ gewisse dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ eigenthümliche ganze Zahlen bedeuten. Die ganze Function $\chi(R)$ vom Grade d in Bezug auf R heisst die charakteristische Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$.

Die obigen Ausführungen liefern zugleich eine allgemeine Methode zur Bestimmung der charakteristischen Function. Um diese Methode an einigen Beispielen zu erläutern, betrachten wir zunächst den Modul (F_1, F_2, F_3), wo F_1, F_2, F_3 die nämlichen 3 quadratischen Formen der 4 homogenen Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 bedeuten, welche bereits in Abschnitt I und III ausführlich behandelt worden sind. Die Zahl der Coefficienten einer quaternären Form von der Ordnung R beträgt $\frac{1}{6}(R+1)(R+2)(R+3)$. Diese Zahl ist um diejenige Zahl zu vermindern, welche angiebt, wie viel linear unabhängige Formen F von der Ordnung R durch die Formel

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3$$

darstellbar sind und die letztere Zahl erhalten wir wiederum dadurch, dass wir die Gesammtzahl der Glieder in den 3 Formen A_1, A_2, A_3 der $R-2^{\text{ten}}$ Ordnung, nämlich die Zahl $3 \cdot \frac{1}{6}(R-1)\,R(R+1)$ um die Zahl derjenigen linear unabhängigen Formensysteme X_1, X_2, X_3 von der Ordnung $R-2$ vermindern, welche der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3 = 0$$

genügen. Wie am Schlusse des Abschnittes I gezeigt worden ist, erhält die allgemeinste Lösung dieser Gleichung die Gestalt

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1^{(1)} x_3 + A_2^{(1)} x_4, \\ X_2 &= A_1^{(1)} x_2 + A_2^{(1)} x_3, \\ X_3 &= A_1^{(1)} x_1 + A_2^{(1)} x_2. \end{aligned}$$

Die zuletzt verlangte Zahl ist daher gleich der Gesammtzahl der Glieder in den beiden Formen $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ der $R-3^{\text{ten}}$ Ordnung, nämlich gleich $2 \cdot \frac{1}{6}(R-2)(R-1)\,R$. Da nach den Ausführungen in Abschnitt III das abgeleitete Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_3 X_1^{(1)} + x_4 X_2^{(1)} &= 0, \\ x_2 X_1^{(1)} + x_3 X_2^{(1)} &= 0, \\ x_1 X_1^{(1)} + x_2 X_2^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung mehr zulässt, so sind jene $2 \cdot \frac{1}{6}(R-2)(R-1)\,R$ Lösungssysteme sämmtlich linear von einander unabhängig und die ursprünglich gesuchte Zahl wird

$$\begin{aligned} \chi(R) = \frac{1}{6}(R+1)(R+2)(R+3) - 3 \cdot \frac{1}{6}(R-1)\,R(R+1) \\ + 2 \cdot \frac{1}{6}(R-2)(R-1)\,R \\ = 1 + 3R. \end{aligned}$$

Dieses Ergebniss entspricht der Thatsache, dass eine Fläche R^{ter} Ordnung genau $1 + 3R$ Bedingungen erfüllen muss, damit sie eine gegebene Raumcurve 3^{ter} Ordnung enthalte.

Um ferner die charakteristische Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_6)$ zu berechnen, wo $F_1, F_2, \ldots, F_6$ die in Abschnitt I angegebenen quadratischen Formen der 5 Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_5$ sind, benutzen wir die in Abschnitt III für diesen Modul aufgestellte Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme. Aus den Ordnungen der in diesen Gleichungssystemen als Coefficienten auftretenden Formen erhalten wir für die charakteristische Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_6)$ den Ausdruck

$$\chi(R) = \frac{(R+1)(R+2)(R+3)(R+4)}{1.2.3.4} - 6\,\frac{(R-1)R(R+1)(R+2)}{1.2.3.4}$$
$$+ 8\,\frac{(R-2)(R-1)R(R+1)}{1.2.3.4} - 3\,\frac{(R-3)(R-2)(R-1)R}{1.2.3.4}$$
$$= 1 + 4R.$$

Behandelt man in gleicher Weise die oben für den Modul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aufgestellte Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme, so ergiebt sich für die charakteristische Function dieses Moduls der Werth

$$\chi(R) = \frac{(R+1)(R+2)\ldots(R+n-1)}{1.2\ldots(n-1)} - \binom{n}{1}\frac{R(R+1)\ldots(R+n-2)}{1.2\ldots(n-1)}$$
$$+ \binom{n}{2}\frac{(R-1)R\ldots(R+n-3)}{1.2\ldots(n-1)} - \cdots$$
$$+ (-1)^n\,\frac{(R-n+1)(R-n+2)\ldots(R-1)}{1.2\ldots(n-1)}$$
$$= 0;$$

und in der That ist offenbar jede beliebige Form nach dem Modul $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Null congruent.

Ist ferner F eine beliebige ternäre Form von der Ordnung r, so erhält die charakteristische Function des durch diese Form bestimmten Moduls (F) den Werth

$$\chi(R) = \frac{(R+1)(R+2)}{1.2} - \frac{(R-r+1)(R-r+2)}{1.2}$$
$$= -\frac{1}{2}(r-1)(r-2) + 1 + rR.$$

Sind F_1, F_2 zwei beliebige ternäre Formen von den Ordnungen r_1, r_2, welche nicht beide die nämliche Form als Factor enthalten, so wird für den Modul (F_1, F_2)

$$\chi(R) = \frac{(R+1)(R+2)}{1.2} - \frac{(R-r_1+1)(R-r_1+2)}{1.2}$$
$$- \frac{(R-r_2+1)(R-r_2+2)}{1.2}$$
$$+ \frac{(R-r_1-r_2+1)(R-r_1-r_2+2)}{1.2}$$
$$= r_1 r_2.$$

Bedeuten endlich F_1, F_2 zwei quaternäre Formen der Ordnungen r_1, r_2 ohne gemeinsamen Factor, so ergiebt sich für die charakteristische Function des Moduls (F_1, F_2) der Werth

$$\chi(R) = \frac{(R+1)(R+2)(R+3)}{1.2.3} - \frac{(R-r_1+1)(R-r_1+2)(R-r_1+3)}{1.2.3}$$
$$- \frac{(R-r_2+1)(R-r_2+2)(R-r_2+3)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{(R-r_1-r_2+1)(R-r_1-r_2+2)(R-r_1-r_2+3)}{1.2.3}$$
$$= 2r_1r_2 - \frac{1}{2}r_1r_2(r_1+r_2) + r_1r_2R.$$

Die in diesem und in dem vorigen Abschnitte gewonnenen allgemeinen Principien setzen uns in den Stand, den besonderen Fall eines Moduls von binären Formen im Sinne unserer Theorie vollkommen erschöpfend zu behandeln. Um dies zu zeigen, sei der Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ vorgelegt, wo $F_1, F_2, \ldots, F_m$ binäre Formen sind, von denen wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass sie nicht sämmtlich eine und dieselbe Form als Factor enthalten und dass ferner alle von der nämlichen Ordnung r sind. Wegen der ersteren Voraussetzung ist die charakteristische Function des Moduls $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ gleich Null. Denn unter jener Voraussetzung lässt sich eine jede binäre Form F von genügend hoher Ordnung R in die Gestalt

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_mF_m$$

bringen, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sämmtlich Formen von der Ordnung $R-r$ sind. Der Beweis dieser Thatsache wurde bereits zu Anfang des Abschnittes I kurz angedeutet. Andererseits berechnen wir die nämliche charakteristische Function nach der oben dargelegten allgemeinen Methode, indem wir für die Gleichung

$$F_1X_1 + F_2X_2 + \cdots + F_mX_m = 0$$

ein volles System von Lösungen aufstellen, in welchem keine durch lineare Combination der anderen Lösungen des Systems erhalten werden kann. Dieses System von Lösungen sei

$$X_1 = G_{1s}, \quad X_2 = G_{2s}, \ldots, X_m = G_{ms}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, m^{(1)})$$

und wir bezeichnen allgemein die den Formen $G_{1s}, G_{2s}, \ldots, G_{ms}$ gemeinsame Ordnung mit r_s. Zwischen diesen Lösungen besteht keine Relation; denn das aus obiger Gleichung abgeleitete Gleichungssystem

$$G_{t1}X_1^{(1)} + G_{t2}X_2^{(1)} + \cdots + G_{tm^{(1)}}X_{m^{(1)}}^{(1)} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, m)$$

besitzt zufolge von Theorem III des vorigen Abschnittes keine Lösung. Die in Rede stehende charakteristische Function wird daher

$$\chi(R) = R + 1 - m(R - r + 1) + \sum^{s}(R - r - r_s + 1)$$
$$= R(m^{(1)} - m + 1) - (r-1)(m^{(1)} - m + 1) + r - \sum^{s} r_s,$$

wo die Summe über $s = 1, 2, \ldots, m^{(1)}$ zu erstrecken ist. Setzen wir auf der rechten Seite den Coefficienten von R und das von R freie Glied einzeln gleich Null, so ergiebt sich

$$m^{(1)} = m - 1,$$
$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_{m-1},$$

und hieraus gewinnen wir den Satz:

Besitzen die m binären Formen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ von der Ordnung r nicht sämmtlich einen gemeinsamen Factor, so besteht das volle Lösungssystem der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = 0$$

stets aus $m - 1$ Lösungen

$$X_1 = G_{1s}, \quad X_2 = G_{2s}, \ldots, X_m = G_{ms}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, m-1)$$

welche durch keine Relation mit einander verknüpft sind, und die Summe der Ordnungen dieser $m - 1$ Lösungen kommt der Zahl r gleich).*

Aus den $m - 1$ Gleichungen

$$G_{1s} F_1 + G_{2s} F_2 + \cdots + G_{ms} F_m = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, m-1)$$

folgt

$$F_1 : F_2 : \cdots : F_m = D_1 : D_2 : \cdots : D_m,$$

wo $D_1, D_2, \ldots, D_m$ die entsprechenden $m-1$ reihigen Determinanten der Matrix

$$\left|\begin{array}{lllll} G_{11} & G_{21} & G_{31} & \ldots & G_{m1} \\ G_{12} & G_{22} & G_{32} & \ldots & G_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{1,m-1} & G_{2,m-1} & G_{3,m-1} & \ldots & G_{m,m-1} \end{array}\right|$$

bedeuten. Da nach dem eben bewiesenen Satze die Ordnung dieser Determinanten in Bezug auf die binären Veränderlichen x_1, x_2 gleich r ist, so sind jene Formen, abgesehen von einem unwesentlichen Zahlenfactor, den entsprechenden Determinanten jener Matrix gleich und wir setzen demnach

$$F_1 = D_1, \quad F_2 = D_2, \ldots, F_m = D_m.$$

Diese Formeln dienen umgekehrt dazu, um die Formen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ zu ermitteln, wenn die $m - 1$ Lösungssysteme

$$X_1 = G_{1s}, \quad X_2 = G_{2s}, \ldots, X_m = G_{ms} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m-1)$$

gegeben sind. Auch erkennen wir zugleich, dass die Ordnungen $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$ keiner beschränkenden Bedingung unterliegen, abgesehen davon, dass ihre Summe gleich r ist.

---

*) Diesen Satz hat bereits F. Meyer vermuthet und bei seinen Untersuchungen über reducible Functionen als Voraussetzung eingeführt; vgl. Math. Ann., Bd. 30, S. 38.

Die Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$ bestimmen überdies, wie man leicht einsieht, vollkommen die oben allgemein definirte Zahlenreihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ für den vorgelegten Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ und infolge dessen auch die Classe, welcher dieser Modul angehört. Für alle die Zahl $2r-1$ übersteigenden Werthe von R wird $c_R = \chi(R) = 0$. Endlich kann man die beiden vorhin gemachten Voraussetzungen fallen lassen, dass die Formen des vorgelegten Moduls sämmtlich von der nämlichen Ordnung und ohne gemeinsamen Theiler sind und man erkennt leicht, welche Abänderungen dann in den gefundenen Resultaten vorzunehmen sind.

Die eben angestellten Betrachtungen erledigen im Wesentlichen die Theorie der binären Moduln. Die weitere Aufgabe besteht in einer entsprechenden Behandlung der Theorie derjenigen Moduln, welche Formen mit drei und mehr Veränderlichen enthalten. Doch sei hier nur hervorgehoben, dass es zu einer solchen Fortentwickelung der Theorie vor Allem der Verallgemeinerung des Noether'schen Fundamentalsatzes*) für Formen von mehr Veränderlichen sowie einer eingehenden Untersuchung aller hierbei in Betracht kommenden Ausnahmefälle bedarf.

Die in Abschnitt I citirten Untersuchungen über Modulsysteme erörtern eine Reihe weiterer für die Theorie der Moduln fundamentaler Begriffe. Die betreffenden Definitionen sind nach geringfügigen Abänderungen auch für die hier betrachteten Moduln von homogenen Formen gültig. Wir beschäftigen uns insbesondere mit den Begriffen des „kleinsten enthaltenden“ und des „grössten gemeinsamen“ Moduls**). Sind irgend zwei homogene Moduln $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ und $(H_1, H_2, \ldots, H_h)$ vorgelegt, so stelle man zunächst für die Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = H_1 Y_1 + H_2 Y_2 + \cdots + H_h Y_h$$

das volle Lösungssystem

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = F_{1s}, \quad X_2 = F_{2s}, \ \ldots, \ X_m = F_{ms} \\ Y_1 = H_{1s}, \quad Y_2 = H_{2s}, \ \ldots, \ Y_h = H_{hs} \end{array}\right\} \quad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

auf und bilde dann die Formen

$$K_s = F_1 F_{1s} + F_2 F_{2s} + \cdots + F_m F_{ms} = H_1 H_{1s} + H_2 H_{2s} + \cdots + H_h H_{hs}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, k).$$

Der Modul $(K_1, K_2, \ldots, K_k)$ ist der kleinste enthaltende Modul. Andererseits erhält man durch Zusammenstellung der einzelnen Formen

*) Vgl. M. Noether, Math. Ann. Bd. 6 und 30, sowie A. Voss, Math. Ann. Bd. 27 und L. Stickelberger, Math. Ann. Bd. 30.

**) Vgl. betreffs der Begriffsbestimmung: L. Kronecker, Crelle's Journal Bd. 92, S. 78 sowie R. Dedekind und H. Weber, Crelle's Journal Bd. 92, S. 197.

der beiden vorgelegten Moduln den grössten gemeinsamen Modul in der Gestalt

$$(F_1, F_2, \ldots, F_m, H_1, H_2, \ldots, H_h) = (G_1, G_2, \ldots, G_g).$$

Es besteht nun eine sehr einfache Beziehung zwischen den charakteristischen Functionen χ_F und χ_H der beiden vorgelegten Moduln und den charakteristischen Functionen χ_K und χ_G des kleinsten enthaltenden und des grössten gemeinsamen Moduls. Um diese Beziehung herzuleiten, bilden wir zunächst ein System S_F von linear unabhängigen Formen R^{ter} Ordnung, welche sämmtlich nach dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ der Null congruent sind und aus denen sich jede andere Form R^{ter} Ordnung von der nämlichen Beschaffenheit linear zusammensetzen lässt. Wenn R eine gewisse Grenze übersteigt, so ist die Zahl der Formen dieses Systems S_F gleich $\varphi(R) - \chi_F(R)$, wo $\varphi(R)$ die Zahl der Glieder einer allgemeinen Form R^{ter} Ordnung bedeutet. Ferner bilden wir ein volles System S_K von linear unabhängigen Formen der R^{ten} Ordnung, welche sowohl nach dem Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ als auch zugleich nach dem Modul $(H_1, H_2, \ldots, H_h)$ der Null congruent sind. Diese Formen sind sämmtlich gleich linearen Combinationen der Formen des Systems S_F. Die Anzahl der Formen des Systems S_K ist für genügend grosse Werthe von R gleich $\varphi(R) - \chi_K(R)$. Endlich bilden wir ein System S von Formen, welche die Formen des Systems S_K zu einem vollen System S_H von linear unabhängigen und nach dem Modul $(H_1, H_2, \ldots, H_h)$ der Null congruenten Formen ergänzen. Die Zahl der Formen des Systems S_H ist $\varphi(R) - \chi_H(R)$ und da die Formen der Systeme S und S_K zusammen die Formen des Systems S_H ergeben, so ist die Zahl der Formen des Systems S gleich

$$\{\varphi(R) - \chi_H(R)\} - \{\varphi(R) - \chi_K(R)\} = \chi_K(R) - \chi_H(R).$$

Nun sind, wie aus der angegebenen Bildungsweise hervorgeht, die Formen der beiden Systeme S_F und S linear von einander unabhängig und andererseits kann man durch lineare Combination der Formen dieser beiden Systeme S_F und S alle Formen herstellen, welche überhaupt lineare Combinationen von Formen der Systeme S_F und S_H sind. Es bilden also die Formen der Systeme S_F und S zusammengenommen ein volles System S_G von linear unabhängigen Formen R^{ter} Ordnung, welche nach dem Modul $(G_1, G_2, \ldots, G_g)$ der Null congruent sind. Den obigen Betrachtungen zufolge ist die Gesammtzahl der Formen in den Systemen S_F und S gleich $\varphi(R) - \chi_F(R) + \chi_K(R) - \chi_H(R)$ und andererseits ist die Zahl der Formen des Systems S_G gleich $\varphi(R) - \chi_G(R)$. Diese beiden Zahlen sind daher einander gleich d. h.

$$\varphi(R) - \chi_F(R) + \chi_K(R) - \chi_H(R) = \varphi(R) - \chi_G(R)$$

oder

$$\chi_F + \chi_H = \chi_K + \chi_G.$$

Wir sprechen dieses Ergebniss in folgendem Satze aus:

Die Summe der charakteristischen Functionen zweier beliebigen Moduln ist gleich der Summe der charakteristischen Functionen für den kleinsten enthaltenden und den grössten gemeinsamen Modul.

Zum Schlusse dieses Abschnittes möge noch kurz der Weg bezeichnet werden, wie sich die eben gewonnenen allgemeinen Resultate für die Theorie der algebraischen Gebilde verwenden lassen.

Es sei zunächst im drei-dimensionalen Raume eine Curve oder ein System von Curven und Punkten gegeben. Durch dieses Gebilde lässt sich nach einem in Abschnitt I bewiesenen Satze stets eine endliche Zahl von Flächen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, F_m = 0$$

solcher Art hindurch legen, das jede andere das Gebilde enthaltende Fläche durch eine Gleichung von der Gestalt

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m = 0$$

dargestellt wird. Diese Ueberlegung zeigt, dass jedem algebraischen Gebilde ein Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ und durch dessen Vermittelung eine bestimmte charakteristische Function $\chi(R)$ zugehört. Die letztere Function giebt dann an, wie viele von einander unabhängige Bedingungen eine Fläche von der eine gewisse Grenze überschreitenden Ordnung R erfüllen müsse, damit sie das betreffende Gebilde enthalte. So hat die charakteristische Function einer doppelpunktslosen Raumcurve von der Ordnung r und dem Geschlechte p den Werth*)

$$\chi(R) = -p + 1 + rR.$$

Als Beispiel diene die cubische Raumcurve, deren charakteristische Function zufolge der vorhin in diesem Abschnitte ausgeführten Rechnung den Werth $1 + 3R$ erhält.

Für die Schnittcurve zweier Flächen von den Ordnungen r_1 und r_2 ergiebt sich der früheren Rechnung zufolge die charakteristische Function

$$\chi(R) = 2r_1 r_2 - \frac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 + r_2) + r_1 r_2 R.$$

Um zugleich im Anschluss an die letzteren Betrachtungen die Bedeutung des zuvor abgeleiteten allgemeinen Satzes über die charakteristischen Functionen zu erläutern, wenden wir denselben auf die Lösung einer Aufgabe aus der Theorie der Raumcurven an. Es mögen zwei Raumcurven ohne Doppelpunkte von den Ordnungen ϱ_1, ϱ_2 und beziehungsweise von den Geschlechtern p_1, p_2 zusammen den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ von den Ordnungen r_1, r_2 bilden. Die den beiden Raumcurven eigenen Moduln

*) Vgl. M. Noether, Crelle's Journal Bd. 93, S. 295.

seien $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ und $(H_1, H_2, \ldots, H_h)$. Der kleinste enthaltende Modul dieser beiden Moduln ist dann (K_1, K_2) und der grösste gemeinsame Modul $(F_1, F_2, \ldots, F_m, H_1, H_2, \ldots, H_h)$ wird geometrisch durch diejenigen Punkte dargestellt, welche beiden Raumcurven gemeinsam sind. Die Zahl dieser Punkte sei ϱ. Die in Betracht kommenden charakteristischen Functionen sind

$$\begin{aligned}
\chi_F(R) &= -p_1 + 1 + \varrho_1 R, \\
\chi_H(R) &= -p_2 + 1 + \varrho_2 R, \\
\chi_K(R) &= \quad 2r_1r_2 - \frac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 + r_2) + r_1 r_2 R, \\
\chi_G(R) &= \quad \varrho
\end{aligned}$$

und die Anwendung unseres Satzes

$$\chi_F + \chi_H = \chi_K + \chi_G$$

ergiebt für die Zahl der den beiden Raumcurven gemeinsamen Punkte den Werth

$$\varrho = -2r_1r_2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 + r_2) - p_1 - p_2 + 2.$$

Was die Verallgemeinerung dieser Betrachtungen auf Räume von beliebig vielen Dimensionen anbetrifft, so erscheinen noch die folgenden Resultate bemerkenswerth. Es sei in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen ein algebraisches Gebilde gegeben und der zu diesem algebraischen Gebilde zugehörige Modul möge die charakteristische Function

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1 \binom{R}{1} + \chi_2 \binom{R}{2} + \cdots + \chi_d \binom{R}{d}$$

besitzen; *dann giebt der Grad d dieser charakteristischen Function die Dimension und der Coefficient χ_d die Ordnung des algebraischen Gebildes an*, während die übrigen Coefficienten $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{d-1}$ mit den von M. Noether*) definirten und behandelten Geschlechtszahlen des Gebildes in engem Zusammenhange stehen. Der allgemeine Beweis hierfür beruht auf dem Schlusse von $n-1$ auf n Veränderliche. Wie man sieht finden sich die eben angegebenen Sätze in dem Falle der Curve im dreidimensionalen Raume in der That bestätigt.

Inwiefern umgekehrt ein Modul durch die Gesammtheit der Werthsysteme bestimmt ist, welche die einzelnen Formen des Moduls gleichzeitig zu Null machen, ist eine Frage, welche erst durch eine systematische und alle möglichen Ausnahmefälle umfassende Untersuchung des Noether'schen Fundamentalsatzes für beliebige Dimensionenzahl eine befriedigende und allgemeingültige Beantwortung finden kann.

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 2 und 8.

Endlich sei noch auf die von A. Cayley, G. Salmon, S. Roberts und A. Brill ausgebildete Theorie der sogenannten beschränkten Gleichungssysteme*) hingewiesen, da insbesondere für diesen Zweig der Algebra unser Begriff der charakteristischen Function eine wirksame Fragestellung sowie einen *einheitlichen* Gesichtspunkt liefert. Ist beispielsweise eine Raumcurve gegeben und betrachten wir irgend drei dieselbe enthaltende Flächen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ beziehungsweise von den Ordnungen r_1, r_2, r_3, so ist die Zahl der Schnittpunkte dieser Flächen, welche ausserhalb jener Raumcurve liegen, offenbar gleich der charakteristischen Function des Moduls (F_1, F_2, F_3), vermindert um die charakteristische Function der Raumcurve. Diese Schlussweise führt in der That zu einem verallgemeinerungsfähigen Beweise für den bekannten Satz, wonach die Zahl der durch eine gemeinsame Raumcurve absorbirten Schnittpunkte jener drei Flächen gleich $\varrho(r_1+r_2+r_3)-\alpha$ ist, wenn ϱ die Ordnung der Raumcurve und α eine andere jener Raumcurve eigene Constante, den sogenannten Rang derselben, bedeutet.

Diese Angaben mögen genügen, um zu zeigen, wie die in diesem Abschnitte entwickelte Theorie der charakteristischen Function zu einer einheitlichen und übersichtlichen Behandlung der einem algebraischen Gebilde eigenthümlichen Zahlen (Dimension, Ordnung, Geschlechter, Rang u. s. w.) führt. Die weitere Aufgabe der Theorie wäre nunmehr die wirkliche Durchführung der diesen Anzahlbestimmungen zu Grunde liegenden algebraischen Processe.

V.

Die Theorie der algebraischen Invarianten.

Die in Abschnitt I entwickelten Principien bewähren ihre Kraft insbesondere auch in demjenigen Theile der Algebra, welcher von den bei linearen Substitutionen der Veränderlichen invariant bleibenden Formen handelt. Bekanntlich hat zuerst P. Gordan**) bewiesen, dass die Invarianten eines Systems von binären Grundformen mit einer Veränderlichenreihe x_1, x_2 sämmtlich ganze und rationale Functionen einer endlichen Anzahl derselben sind. Die zu diesem Beweise benutzten Methoden reichen jedoch nicht aus, wenn es sich um den Nachweis des entsprechenden Satzes für Formen von mehr Veränderlichen handelt, oder wenn die Grundformen mehrere Reihen von Veränderlichen enthalten, welche theilweise verschiedenen linearen Trans-

*) Vgl. G. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, Vorlesung 22 und 23, sowie den bezüglichen Litteraturnachweis.

**) Vgl. Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. II, S. 231. Andere Beweise sind gegeben worden von F. Mertens in Crelle's Journal Bd. 100, S. 223 und vom Verfasser in den Math. Ann. Bd. 33, S. 223.

formationen unterliegen. Es sollen im Folgenden die Mittel dargelegt werden, deren es zur Erledigung der eben gekennzeichneten allgemeineren Fragen bedarf.

Um in dem Beweise die wesentlichen Gedanken möglichst klar hervortreten zu lassen, betrachten wir zunächst den einfachen Fall einer einzigen binären Grundform f mit nur einer Veränderlichenreihe x_1, x_2.

Nach einem in Abschnitt I bewiesenen Satze lässt sich aus einem jeden beliebig gegebenen Formensysteme stets eine endliche Zahl von Formen derart auswählen, dass jede andere Form des Systems durch lineare Combination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann. Wir betrachten insbesondere das System aller Invarianten der binären Grundform f und es muss dann nach dem angeführten Satze nothwendigerweise eine endliche Zahl m von Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ geben von der Art, dass eine jede andere Invariante i der Grundform f in der Gestalt

$$(38) \qquad i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$$

ausgedrückt werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ganze homogene Functionen der Coefficienten der Grundform f sind. Doch kann dieses Ergebniss offenbar auch direct aus Theorem I in Abschnitt I abgeleitet werden. Um dies kurz zu zeigen, wählen wir zunächst nach Willkür aus der Gesammtheit der Invarianten der gegebenen Grundform f eine Invariante aus und bezeichnen dieselbe mit i_1; ferner möge i_2 eine Invariante der Grundform f sein, welche nicht einem Producte von der Gestalt $A_1 i_1$ gleich ist, wo A_1 eine ganze homogene Function der Coefficienten der Grundform f ist; i_3 sei nun eine Invariante, welche sich nicht in die Gestalt $A_1 i_1 + A_2 i_2$ bringen lässt, wo A_1 und A_2 wiederum ganze homogene Functionen der Coefficienten der Grundform f sind. Entsprechend sei i_4 eine Invariante der Grundform, welche sich nicht in die Gestalt $A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3$ bringen lässt und wenn wir in dieser Weise fortfahren, so gewinnen wir eine Formenreihe $i_1, i_2, i_3, \ldots$, in welcher keine Form durch lineare Combination der vorhergehenden Formen erhalten werden kann. Aus Theorem I in Abschnitt I folgt, dass eine solche Reihe nothwendig im Endlichen abbricht. Bezeichnen wir die letzte Form jener Reihe mit i_m, so ist eine jede Invariante der gegebenen Grundform f gleich einer linearen Combination der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Das so gewonnene Ergebniss bezeichnet den e r s t e n Schritt, welcher zum Beweise der Endlichkeit des vollen Invariantensystems erforderlich ist.

Der z w e i t e Schritt besteht darin, zu zeigen, dass in dem Ausdrucke $A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$ die Functionen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ stets durch Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$ ersetzt werden können, ohne, dass sich dabei der Werth i jenes Ausdrucks ändert. Dieser zweite Schritt lässt sich in dem hier zunächst betrachteten Falle einer binären Grundform mit nur einer Veränderlichenreihe in besonders einfacher Weise ausführen, wenn wir uns des folgenden in der Inauguraldissertation*) des Verfassers bewiesenen Satzes bedienen:

Jede homogene und isobare (d. h. nur aus Gliedern von dem nämlichen Gewichte bestehende) Function der Coefficienten einer binären Form

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

vom Grade r in den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und vom Gewichte $p = \frac{nr}{2}$ geht nach Anwendung des Differentiationsprocesses

$$\begin{aligned}[\,] &= 1 - \frac{\Delta D}{1!2!} + \frac{\Delta^2 D^2}{2!3!} - \frac{\Delta^3 D^3}{3!4!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{D\Delta}{1!2!} + \frac{D^2\Delta^2}{2!\,3!} - \frac{D^3\Delta^3}{3!4!} + \cdots,\end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} D &= a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots \\ \Delta &= n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (n-2) a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots \end{aligned}$$

zu setzen ist, in eine Invariante jener Grundform über.

Wir bezeichnen nun die Gewichte der Invarianten $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$ beziehungsweise mit $p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ und fassen ferner allgemein unter der Bezeichnung B_s alle diejenigen Glieder des Ausdruckes A_s zusammen, welche vom Gewichte $p - p_s$ sind. Da in der Formel (38) auf der linken Seite nur Glieder vom Gewichte p vorhanden sind, so dürfen wir auf der rechten Seite der nämlichen Formel alle Glieder der Producte $A_s i_s$ unterdrücken, deren Gewichte kleiner oder grösser als p sind, und wir erhalten dadurch für i den Ausdruck

(39) $$i = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \cdots + B_m i_m.$$

wo $B_1, B_2, \ldots, B_m$ eben jene homogenen und isobaren Functionen der Coefficienten der Grundform sind. Beachten wir nun, dass eine Invariante bei Anwendung des Differentiationsprocesses D sowie bei Anwendung des Differentiationsprocesses Δ identisch verschwindet und dass die homogenen und isobaren Functionen B_s dem obigen Satze zufolge bei Anwendung des Differentiationsprocesses [ ] in gewisse Invarianten J_s der binären Grundform f übergehen, so folgt

$$\begin{aligned} [i] &= i, \\ [B_s i_s] &= [B_s] i_s = J_s i_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

*) Ueber die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen. Königsberg i. Pr. 1885, sowie: Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete, Math. Ann. Bd. 30, S. 15.

und, wenn wir auf jedes Glied in (39) den Process [ ] anwenden, so entsteht die Gleichung

$$i = J_1 i_1 + J_2 i_2 + \cdots + J_m i_m.$$

Die Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$ sind sämmtlich von niederem Grade in den Coefficienten der Grundform als die Invariante i und indem wir nun diese Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$ der nämlichen Behandlung unterwerfen, wie vorhin die Invariante i, erhalten wir schliesslich eine ganze und rationale Darstellung der Invariante i mit Hülfe der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Die letzteren m Invarianten bilden daher das volle System der Invarianten für die vorgelegte binäre Grundform f.

Der zweite Schritt in diesem Beweise bestand darin, dass wir zeigten, wie in dem ursprünglichen Ausdrucke (38) für i die Functionen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ selber durch Invarianten zu ersetzen sind. Wenn es sich nun um Grundformen von mehreren Veränderlichen handelt, so kann dieser zweite Schritt nicht genau in der nämlichen Weise wie vorhin ausgeführt werden, weil diejenigen Sätze noch nicht bekannt sind, welche in der Invariantentheorie der Formen mit mehr Veränderlichen dem vorhin für das binäre Formengebiet ausgesprochenen Satze entsprechen. Aber in jenem allgemeineren Falle leistet den gleichen Dienst ein Satz, welcher im wesentlichen mit einem von P. Gordan*) und F. Mertens**) bewiesenen Satze übereinstimmt und für ternäre Formen, wie folgt, lautet:

Es sei ein System von ternären Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ mit den Veränderlichen x_1, x_2, x_3 vorgelegt; die Formen dieses Systems mögen vermittelst der linearen Substitution der Veränderlichen

$$(40)\qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{aligned} \qquad a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

übergehen beziehungsweise in $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$. Es sei ferner $F(f_a)$ irgend eine ganze Function der Coefficienten dieser transformirten Formen $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$, welche in den Coefficienten jeder einzelnen Form homogen ist. Multipliciren wir diese Function $F(f_a)$ mit a^q, wo a die Substitutionsdeterminante und q eine beliebige nicht negative ganze Zahl bedeutet, und wenden wir dann auf das Product $a^q F(f_a)$ den Differentiationsprocess

---

*) Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. II, § 9; vgl. auch A. Clebsch, Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen, Crelle's Journal Bd. 59.

**) Ueber invariante Gebilde ternärer Formen, Sitzungsb. der kais. Akad. der Wiss. zu Wien, Bd. 95.

$$\Omega_a = \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}\,\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\,\partial a_{23}\,\partial a_{32}} + \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\,\partial a_{23}\,\partial a_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\,\partial a_{21}\,\partial a_{33}} + \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\,\partial a_{21}\,\partial a_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\,\partial a_{22}\,\partial a_{31}}$$

so oft an, bis sich ein von den Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ freier Ausdruck ergiebt, so ist der so *entstehende* Ausdruck eine Invariante des Formensystems $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Eigenschaft der Unveränderlichkeit der Invarianten bei linearer Transformation. Um dies zu zeigen, denken wir uns die Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ in den Veränderlichen y_1, y_2, y_3 geschrieben und wenden dann auf die letzteren Veränderlichen die lineare Transformation

$$(41)\qquad \begin{aligned} y_1 &= b_{11} z_1 + b_{12} z_2 + b_{13} z_3, \\ y_2 &= b_{21} z_1 + b_{22} z_2 + b_{23} z_3, \\ y_3 &= b_{31} z_1 + b_{32} z_2 + b_{33} z_3, \end{aligned} \qquad b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

an. Hierdurch mögen die Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ beziehungsweise in $f_b^{(1)}, f_b^{(2)}, \ldots, f_b^{(k)}$ übergehen. Endlich setzen wir die beiden linearen Substitutionen (40) und (41) zusammen zu der linearen Substitution

$$(42)\qquad \begin{aligned} x_1 &= c_{11} z_1 + c_{12} z_2 + c_{13} z_3, \\ x_2 &= c_{21} z_1 + c_{22} z_2 + c_{23} z_3, \\ x_3 &= c_{31} z_1 + c_{32} z_2 + c_{33} z_3, \end{aligned} \qquad c = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = ab,$$

wo $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{33}$ die bekannten bilinearen Verbindungen der Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ und $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{33}$ sind. Die Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ mögen bei Anwendung der zusammengesetzten Substitution (42) in $f_c^{(1)}, f_c^{(2)}, \ldots, f_c^{(k)}$ übergehen. Zu der Substitution (41) gehört der Differentiationsprocess

$$\Omega_b = \frac{\partial^3}{\partial b_{11}\,\partial b_{22}\,\partial b_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{11}\,\partial b_{23}\,\partial b_{32}} + \frac{\partial^3}{\partial b_{12}\,\partial b_{23}\,\partial b_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{12}\,\partial b_{21}\,\partial b_{33}} + \frac{\partial^3}{\partial b_{13}\,\partial b_{21}\,\partial b_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{13}\,\partial b_{22}\,\partial b_{31}}$$

und zu der zusammengesetzten Substitution (42) gehört der Differentiationsprocess

$$\Omega_c = \frac{\partial^3}{\partial c_{11}\,\partial c_{22}\,\partial c_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{11}\,\partial c_{23}\,\partial c_{32}} + \frac{\partial^3}{\partial c_{12}\,\partial c_{23}\,\partial c_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{12}\,\partial c_{21}\,\partial c_{33}} + \frac{\partial^3}{\partial c_{13}\,\partial c_{21}\,\partial c_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{13}\,\partial c_{22}\,\partial c_{31}}.$$

Bezeichnen wir mit p die Zahl, welche angiebt, nach wie vielmaliger Anwendung von Ω_a der Ausdruck $a^q F(f_a)$ von den Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ frei wird, so besteht unsere Aufgabe darin, zu zeigen, dass der Ausdruck

$$J(f) = \Omega_a^p \left\{a^q F(f_a)\right\}$$

ein Invariante der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ ist. Da der Ausdruck rechter Hand von den Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ frei sein soll, so ist auch

$$J(f) = \Omega_b^p \left\{b^q F(f_b)\right\}.$$

In dieser Formel setzen wir für die Coefficienten der Formen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ die entsprechenden Coefficienten der transformirten Formen $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$ ein. Dadurch gehen die Coefficienten der Formen $f_b^{(1)}, f_b^{(2)}, \ldots, f_b^{(k)}$ in die Coefficienten der Formen $f_c^{(1)}, f_c^{(2)}, \ldots, f_c^{(k)}$ über und wir erhalten

$$J(f_a) = \Omega_b^p \left\{b^q F(f_c)\right\}$$

oder

$$a^q J(f_a) = \Omega_b^p \left\{c^q F(f_c)\right\}. \tag{43}$$

Der Ausdruck $c^q F(f_c)$ hängt von den Coefficienten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ und von den Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$, $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{33}$ ab; er enthält jedoch diese Substitutionscoefficienten lediglich in den bilinearen Verbindungen $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{33}$. Es gilt nun für eine jede Function G dieser bilinearen Verbindungen $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{33}$ wie aus dem Multiplicationssatze der Determinanten leicht erkannt wird, die Beziehung

$$\Omega_b G = a \Omega_c G$$

und durch p-malige Anwendung derselben erhalten wir

$$\Omega_b^p \left\{c^q F(f_c)\right\} = a^p \Omega_c^p \left\{c^q F(f_c)\right\}. \tag{44}$$

Es ist nun andererseits

$$J(f) = \Omega_c^p \left\{c^q F(f_c)\right\}$$

und folglich wegen (43) und (44)

$$J(f_a) = a^{p-q} J(f).$$

Diese Formel zeigt, dass dem Ausdrucke $J(f)$ die Invarianteneigenschaft zukommt.

Der eben bewiesene Satz ermöglicht die Aufstellung von beliebig vielen Invarianten des vorgelegten Formensystems. Um zu zeigen, dass durch dieses Verfahren sämmtliche Invarianten gefunden werden können, betrachten wir den Ausdruck $\Omega_a^p a^p$. Das Differentiationssymbol Ω_a geht aus der Determinante a hervor, wenn wir allgemein in jedem Gliede $\pm a_{11'} a_{22'} a_{33'}$ der letzteren für das Product $a_{11'} a_{22'} a_{33'}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial^3}{\partial a_{11'} \partial a_{22'} \partial a_{33'}}$ einsetzen, wo $1', 2', 3'$ die Zahlen 1, 2, 3 in irgend einer Reihenfolge bedeuten. Entsprechend erhalten wir das Differentiationssymbol Ω_a^p aus a^p, wenn wir in dem entwickelten Ausdruck für a^p allgemein an Stelle von $a_{11}^{p_{11}} a_{12}^{p_{12}} \ldots a_{33}^{p_{33}}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial^{3p}}{\partial a_{11}^{p_{11}} \partial a_{12}^{p_{12}} \ldots \partial a_{33}^{p_{33}}}$ einsetzen, wo $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{33}$ gewisse Exponenten bedeuten, deren Summe gleich $3p$ ist. Hieraus folgt insbesondere, dass das Vorzeichen von $a_{11}^{p_{11}} a_{12}^{p_{12}} \ldots a_{33}^{p_{33}}$ in a^p übereinstimmt mit dem Vorzeichen von $\frac{\partial^{3p}}{\partial a_{11}^{p_{11}} \partial a_{12}^{p_{12}} \ldots \partial a_{33}^{p_{33}}}$ in Ω_a^p; wenden wir daher Ω_a^p auf a^p an, so ergiebt sich eine Summe von lauter positiven Zahlen: d. h. $\Omega_a^p a^p$ ist eine von Null verschiedene Zahl*); diese Zahl werde mit N_p bezeichnet.

Es sei nun $J(f)$ eine beliebig vorgelegte Invariante, und dieselbe ändere sich bei der Transformation um die p^{te} Potenz der Substitutionsdeterminante. Die Relation

$$\Omega_a^p \left\{ \frac{1}{N_p} J(f_a) \right\} = \frac{1}{N_p} J(f) \Omega_a^p a^p = J(f)$$

zeigt dann, wie die Invariante $J(f)$ durch das angegebene Verfahren erhalten wird und somit folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung.

Auf diese Betrachtungen gründet sich der erstrebte Beweis für die Endlichkeit des vollen Invariantensystems im ternären Formengebiete. Der erste zu diesem Beweise führende Schritt ist der nämliche, wie vorhin im Falle der binären Formen und wir nehmen demgemäss wiederum an, es seien aus der Gesammtheit der Invarianten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ die m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ derart ausgewählt, dass eine jede andere Invariante J jener Grundformen in der Gestalt

$$(45) \qquad i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$$

ausgedrückt werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ganze homogene Functionen der Coefficienten der Grundformen sind.

Der zweite Schritt besteht darin, zu zeigen, dass in dem Ausdrucke $A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$ die Functionen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ stets durch Invarianten ersetzt werden können, ohne dass sich dabei der Werth i des Ausdruckes ändert. Zunächst beachten wir, dass eine Invariante ihrer Definition nach in den Coefficienten einer jeden einzelnen Grundform homogen ist. Es seien die Invarianten $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$ in

*) Vgl. A. Clebsch, l. c. S. 12, wo die letztere Thatsache im Wesentlichen auf dem nämlichen Wege bewiesen worden ist.

den Coefficienten der ersten Grundform $f^{(1)}$ beziehungsweise vom Grade $r, r_1, r_2, \ldots, r_m$. Da die linke Seite in Formel (45) demnach nur Glieder vom Grade r in den Coefficienten von $f^{(1)}$ enthält, so dürfen wir auf der rechten Seite der nämlichen Formel allgemein in den Functionen A_s alle diejenigen Glieder unterdrücken, deren Grad in den Coefficienten von $f^{(1)}$ kleiner oder grösser als $r - r_s$ ist. Wenn wir in gleicher Weise die Grade in Bezug auf die Coefficienten der übrigen Grundformen reduciren, so gelangen wir schliesslich zu der Gleichung

$$i = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \cdots + B_m i_m$$

wo die Functionen $B_1, B_2, \ldots, B_m$ in den Coefficienten jeder einzelnen Grundform homogen sind. In dieser Gleichung setzen wir an Stelle der Coefficienten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ die entsprechenden Coefficienten der transformirten Grundformen $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$ ein und benutzen dann die Invarianteneigenschaft von $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$; dadurch ergiebt sich

$$a^p i = a^{p_1} B_1(f_a) i_1 + a^{p_2} B_2(f_a) i_2 + \cdots + a^{p_m} B_m(f_a) i_m,$$

wo p, p_s die Gewichte der Invarianten i, i_s und wo $B_s(f_a)$ die entsprechenden Functionen der Coefficienten der transformirten Grundformen $f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$ sind. Wenden wir auf die erhaltene Relation p mal das Differentiationssymbol Ω_a an, so folgt

$$\Omega_a^p \{a^p\} \cdot i = \Omega_a^p \{a^{p_1} B_1(f_a)\} \cdot i_1 + \Omega_a^p \{a^{p_2} B_2(f_a)\} \cdot i_2 + \cdots \\ + \Omega_a^p \{a^{p_m} B_m(f_a)\} \cdot i_m$$

und, wenn wir durch die von Null verschiedene Zahl $N_p = \Omega_a^p \{a^p\}$ auf beiden Seiten dividiren, entsteht eine Gleichung von der Gestalt

$$i = J_1 i_1 + J_2 i_2 + \cdots + J_m i_m,$$

wo unserem vorhin bewiesenen Satze zufolge die Ausdrücke

$$J_s = \frac{1}{N_p} \Omega_a^p \{a^{p_s} B_s(f_a)\} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

Invarianten der vorgelegten Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ sind.

Unterwerfen wir diese Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_m$ der nämlichen Behandlung, wie vorhin die Invariante i, so folgt, dass auch diese Invarianten durch lineare Combination aus $i_1, i_2, \ldots, i_m$ erhalten werden können, wobei die als Coefficienten in der linearen Combination auftretenden Functionen wiederum Invarianten sind. Da sich aber bei jedesmaliger Wiederholung dieses Verfahrens die Gewichte der darzustellenden Invarianten vermindern, so bricht das Verfahren ab, und wir erhalten schliesslich eine ganze und rationale Darstellung der Invariante i mit Hülfe der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Damit ist der erstrebte Beweis für ternäre Grundformen mit einer Veränderlichenreihe erbracht.

Aber es geschah lediglich im Interesse einer kürzeren Darstellung, wenn wir uns im Vorhergehenden auf diesen Fall beschränkten und wir sehen nachträglich leicht ein, dass unsere Schlüsse sich ohne Weiteres auf den Fall von Grundformen mit n Veränderlichen übertragen lassen. An Stelle des vorhin benutzten Differentiationsprocesses tritt dann der allgemeine Differentiationsprocess

$$\Omega_a = \Sigma \pm \frac{\partial^n}{\partial a_{11'} \partial a_{22'} \ldots, \partial a_{nn'}}, \quad (1', 2', \ldots, n' = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ die n^2 Coefficienten der linearen Substitution der n Veränderlichen bedeuten.

Enthalten ferner die Grundformen mehrere Veränderlichenreihen, welche sämmtlich der nämlichen linearen Transformation unterliegen, so bleibt das obige Verfahren ebenfalls genau das gleiche und selbst in dem Falle, wo mehrere Veränderlichenreihen in den Grundformen auftreten, welche theilweise verschiedenen linearen Transformationen unterworfen sind, bedarf es nur eines kurzen Hinweises, in welcher Art die obige Schlussweise zu verallgemeinern ist.

Es sei ein System von Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ mit einer ternären Veränderlichenreihe x_1, x_2, x_3 und mit einer binären Veränderlichenreihe ξ_1, ξ_2 vorgelegt, welche gleichzeitig und zwar mittelst der Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3, \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3, \\ x_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3, \end{aligned} \qquad a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_{11} \eta_1 + \alpha_{12} \eta_2, \\ \xi_2 &= \alpha_{21} \eta_1 + \alpha_{22} \eta_2, \end{aligned} \qquad \alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

zu transformiren sind. Nach Ausführung dieser Transformation gehen die Formen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ über in die Formen $f^{(1)}_{a\alpha}, f^{(2)}_{a\alpha}, \ldots, f^{(k)}_{a\alpha}$, deren Coefficienten sowohl die Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ als auch die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ enthalten. Unter einer Invariante in Bezug auf diese Transformationen verstehen wir dann einen in den Coefficienten jeder einzelnen Grundform homogenen Ausdruck, welcher sich nur um Potenzen der Substitutionsdeterminanten a und α ändert, wenn wir in demselben für die Coefficienten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ die entsprechenden Coefficienten der transformirten Grundformen $f^{(1)}_{a\alpha}, f^{(2)}_{a\alpha}, \ldots, f^{(k)}_{a\alpha}$ einsetzen. Unserem oben bewiesenen Satze entspricht dann im vorliegenden Falle der folgende Satz:

Es sei $F(f_{a\alpha})$ irgend eine ganze Function der Coefficienten der transformirten Formen $f^{(1)}_{a\alpha}, f^{(2)}_{a\alpha}, \ldots, f^{(k)}_{a\alpha}$, welche in den Coefficienten jeder einzelnen Form homogen ist. Multipliciren wir diese Function $F(f_{a\alpha})$ mit $a^q\,\alpha^\varkappa$, wo q und $\varkappa$ beliebige nicht negative ganze Zahlen sind und wenden wir dann auf das Product $a^q\,\alpha^\varkappa\,F(f_{a\alpha})$ jeden der beiden Processe

$$\Omega_a = \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{22}\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{23}\partial a_{32}} + \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\partial a_{23}\partial a_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\partial a_{21}\partial a_{33}} + \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\partial a_{21}\partial a_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\partial a_{22}\partial a_{31}}$$

und

$$\Omega_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{11}\partial \alpha_{22}} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{12}\partial \alpha_{21}}$$

so oft an, bis sich ein von den Substitutionscoefficienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ freier Ausdruck ergiebt, so ist der entstehende Ausdruck eine Invariante der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ in dem verlangten Sinne.

Der Beweis dieses Satzes entspricht vollkommen dem vorhin für Formen mit einer ternären Veränderlichenreihe ausführlich dargelegten Beweise und ebenso erkennt man ohne Schwierigkeit, dass auch umgekehrt jede Invariante erhalten werden kann, indem man auf eine geeignet gewählte Function der Coefficienten der transformirten Formen die Differentiationsprocesse Ω_a und Ω_α in der durch den obigen Satz vorgeschriebenen Weise anwendet.

Um nun die Endlichkeit des vollen Systems der in Rede stehenden Invarianten darzuthun, nehmen wir wiederum an, es seien die m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ derart ausgewählt, dass jede andere Invariante i in der Gestalt

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$$

ausgedrückt werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ganze homogene Functionen der Coefficienten der Grundformen sind. Aus dieser Relation erhalten wir auf dem nämlichen Wege wie vorhin eine Relation von der Gestalt

$$i = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \cdots + B_m i_m$$

wo die Functionen $B_1, B_2, \ldots, B_m$ in den Coefficienten jeder einzelnen Grundform homogen sind. Setzen wir in dieser Gleichung an Stelle der Coefficienten der Grundformen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$ die entsprechenden Coefficienten der transformirten Grundformen $f^{(1)}_{a\alpha}, f^{(2)}_{a\alpha}, \ldots, f^{(k)}_{a\alpha}$ ein, so folgt

$$a^p\,\alpha^\pi\,i = a^{p_1}\alpha^{\pi_1}B_1(f_{a\alpha})\,i_1 + \cdots + a^{p_m}\alpha^{\pi_m}B_m(f_{a\alpha})\,i_m.$$

Die Anwendung des Differentiationsprocesses $\Omega_a^p\,\Omega_\alpha^\pi$ und die Division durch die von Null verschiedene Zahl

$$\Omega_a^p\,\Omega_\alpha^\pi\left\{a^p\,\alpha^\pi\right\} = N_p\,\mathrm{N}_\pi$$

führt schliesslich zu einer Gleichung von der Gestalt

$$i = J_1 i_1 + J_2 i_2 + \cdots + J_m i_m,$$

wo $J_1, J_2, \ldots, J_m$ Invarianten der Grundformen in dem verlangten Sinne sind. Diese Formel führt nach wiederholter Anwendung zu einer ganzen rationalen Darstellung der Invariante i mit Hülfe der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$.

Auch in dem eben behandelten Falle sehen wir nachträglich leicht ein, dass die angewandte Schlussweise sich ohne Weiteres auf den Fall übertragen lässt, wo die gegebenen Grundformen beliebig viele, den nämlichen oder verschiedenen Transformationen unterliegende Veränderlichenreihen enthält. Wir sprechen daher den allgemeinen Satz aus:

Theorem V. *Ist ein System von Grundformen mit beliebig vielen Veränderlichenreihen gegeben, welche in vorgeschriebener Weise den nämlichen oder verschiedenen linearen Transformationen unterliegen, so giebt es für dasselbe stets eine endliche Zahl von ganzen und rationalen Invarianten, durch welche sich jede andere ganze und rationale Invariante in ganzer und rationaler Weise ausdrücken lässt.*

Was die sogenannten Covarianten und Combinanten von Formensystemen bestrifft, so fallen diese Bildungen sämmtlich als specielle Fälle unter den oben behandelten Begriff der Invariante. Für diese invarianten Bildungen folgt also ebenfalls aus Theorem V die Endlichkeit der vollen Systeme. Das Gleiche gilt von den sogenannten Contravarianten und allen anderen invarianten Bildungen, bei welchen gewisse aus mehreren Reihen von Veränderlichen zusammengesetzte Determinanten ihrerseits als Veränderliche eintreten*). Diese Bildungen kann man dadurch unter den oben zu Grunde gelegten Invariantenbegriff fassen, dass man geeignete Formen mit mehreren Veränderlichenreihen zu den schon vorhandenen Grundformen hinzufügt. Wenn dies geschehen ist, lassen sich die bisherigen Ueberlegungen unmittelbar übertragen und es folgt daher insbesondere auch für alle solchen invarianten Bildungen die Endlichkeit des vollen Systems. Als Beispiel für diesen Fall diene ein System von Grundformen, in welchen die 6 Liniencoordinaten p_{ik} die Veränderlichen sind.

Anders verhält es sich jedoch, sobald wir die Verallgemeinerung des Invariantenbegriffes in einer Richtung vornehmen, wie sie durch die Untersuchungen von F. Klein**) und S. Lie***) bezeichnet ist.

---

*) Vgl. E. Study, Ueber den Begriff der Invariante algebraischer Formen, Berichte der kgl. sächs. Ges. der Wiss. 1887. S. 142.

**) Vgl. die Programmschrift: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen." Erlangen 1872.

***) Vgl. die Vorrede des Werkes: „Theorie der Transformationsgruppen." Leipzig 1888.

Bisher nämlich hatten wir die Invariante definirt als eine ganze homogene Function der Coefficienten der Grundformen, welche gegenüber allen linearen Transformationen der Veränderlichen die Invarianteneigenschaft besitzt. Wir wählen nunmehr, jener allgemeineren Begriffsbildung folgend, eine bestimmte Untergruppe der allgemeinen Gruppe der linearen Transformationen aus und fragen nach denjenigen ganzen homogenen Functionen der Coefficienten der Grundformen, denen nur mit Rücksicht auf die Substitutionen der ausgewählten Untergruppe die Invarianteneigenschaft zukommt. Obwohl unter diesen Invarianten offenbar alle Invarianten im früheren Sinne enthalten sind, so folgt doch aus unseren bisherigen Sätzen über die Endlichkeit der vollen Invariantensysteme noch nicht, dass auch unter den Invarianten im erweiterten Sinne sich jederzeit eine endliche Anzahl auswählen lässt, durch welche jede andere Invariante der nämlichen Art ganz und rational ausgedrückt werden kann.

Die bisherigen Entwickelungen und Ergebnisse lassen sich auf die Theorie der Invarianten in dem erweiterten Sinne allemal dann unmittelbar übertragen, wenn die Coefficienten der die Gruppe bestimmenden Substitutionen ganze und rationale Functionen einer gewissen Anzahl von Parametern sind derart, dass durch Zusammensetzung zweier beliebigen Substitutionen der Gruppe eine Substitution entsteht, deren Parameter bilineare Functionen der Parameter der beiden ursprünglich ausgewählten Substitutionen sind und wenn es zugleich einen Differentiationsprocess giebt, welcher sich in entsprechender Weise zur Erzeugung der zur vorgelegten Gruppe gehörigen Invarianten verwenden lässt, wie der Differentiationsprocess Ω im Falle der zur allgemeinen linearen Gruppe gehörigen Invarianten. Für solche Substitutionengruppen ergiebt sich stets durch unser Schlussverfahren die Endlichkeit des zur Gruppe gehörigen Invariantensystems.

Um kurz zu zeigen, wie der Beweis in solchen Fällen zu führen ist, betrachten wir die Gruppe der ternären orthogonalen Substitutionen d. h. die Gruppe aller derjenigen linearen Substitutionen von drei homogenen Veränderlichen, bei deren Ausführung die Summe der Quadrate der Veränderlichen ungeändert bleibt. Die Transformationsformeln für diese Substitutionen sind bekanntlich

$$\begin{aligned}
x_1 &= (a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2)y_1 - 2(a_1a_3+a_2a_4)y_2 - 2(a_1a_4-a_2a_3)y_3,\\
x_2 &= 2(a_1a_3-a_2a_4)y_1 + (a_1^2-a_2^2-a_3^2+a_4^2)y_2 - 2(a_1a_2+a_3a_4)y_3,\\
x_3 &= 2(a_1a_4+a_2a_3)y_1 + 2(a_1a_2-a_3a_4)y_2 + (a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2)y_3,
\end{aligned}$$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 die 4 homogenen Parameter der Substitutionengruppe bedeuten. Die Gruppeneigenschaft dieser Substitutionen bestätigt sich leicht, wenn man in den eben angegebenen Formeln an Stelle der Parameter a_1, a_2, a_3, a_4 andere Grössen einträgt und die so erhaltene Substitution mit der ursprünglichen zusammensetzt. Was die zu dieser Substitutionengruppe gehörigen Invarianten betrifft, so gilt der folgende Satz:

Wenn man ein System von ternären Grundformen vermöge der angegebenen Substitutionsformeln linear transformirt und auf eine beliebige homogene Function der Coefficienten der transformirten Grundformen das Differentiationssymbol

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_4^2}$$

so oft anwendet, bis sich ein von den Parametern a_1, a_2, a_3, a_4 freier Ausdruck ergiebt, so besitzt dieser Ausdruck die Invarianteneigenschaft gegenüber der durch jene Formeln definirten Substitutionengruppe. Das gleiche gilt, wenn jene homogene Function der transformirten Coefficienten noch zuvor mit einer beliebigen ganzen Potenz des Ausdruckes $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ multiplicirt wird.

Die Anwendung dieses Satzes ermöglicht den gesuchten Beweis der Endlichkeit des vollen Invariantensystems, wie man leicht erkennt, wenn man die Entwickelungen des früheren Beweises auf den vorliegenden Fall überträgt.

Ein anderes Beispiel liefert diejenige Gruppe, welche die folgenden quaternären Substitutionen enthält

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1^3 \, y_1 + 3a_1^2 a_2 \, y_2 + 3a_1 a_2^2 \, y_3 + a_2^3 \, y_4, \\
x_2 &= a_1^2 a_3 y_1 + (a_1^2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3) y_2 + (2a_1 a_2 a_4 + a_2^2 a_3) y_3 + a_2^2 a_4 y_4, \\
x_3 &= a_1 a_3^2 y_1 + (2a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2) y_2 + (a_1 a_4^2 + 2a_2 a_3 a_4) y_3 + a_2 a_4^2 y_4, \\
x_4 &= a_3^3 \, y_1 + 3a_3^2 a_4 \, y_2 + 3a_3 a_4^2 \, y_3 + a_1^3 \, y_4.
\end{aligned}$$

Deuten wir die Veränderlichen als homogene Coordinaten der Punkte des Raumes, so stellen diese Formeln mit den veränderlichen Parametern a_1, a_2, a_3, a_4 alle linearen Transformationen des Raumes dar, bei welchen eine gewisse Raumcurve dritter Ordnung ungeändert bleibt. Durch die entsprechenden Betrachtungen wie vorhin folgt auch für diesen Fall die Endlichkeit des vollen Invariantensystems.

Nachdem für ein vorgelegtes System von Grundformen die Invarianten sämmtlich aufgestellt worden sind, entsteht die weitere Frage nach der gegenseitigen Abhängigkeit der Invarianten dieses endlichen Systems. Für eine derartige Untersuchung dienen wiederum die Theoreme I und III als Grundlage. Wenn wir nämlich in den dort auftretenden Formen eine der n homogenen Veränderlichen der Einheit gleich setzen, so erkennen wir unmittelbar, dass jene beiden Theoreme auch für nicht homogene Functionen gültig sind und es ist somit insbesondere die Anwendung derselben auf die zwischen den Invarianten bestehenden Relationen gestattet. Verstehen wir nun in üblicher Ausdrucksweise unter einer irreduciblen Syzygie eine solche Relation zwischen den Invarianten des Grundformensystems, deren linke Seite nicht durch lineare Combination von Syzygien niederer Grade erhalten werden kann, so folgt aus Theorem I der Satz:

Ein endliches System von Invarianten besitzt nur eine endliche Zahl von irreduciblen Syzygien.

Als Beispiel diene das volle Invariantensystem von 3 binären quadratischen Grundformen, welches bekanntlich aus 7 Invarianten und 6 Covarianten besteht. Es lässt sich zeigen, dass es für dieses Invariantensystem 14 irreducible Syzygien giebt, aus denen jede andere Syzygie durch lineare Combination erhalten werden kann.

Die Aufstellung des vollen Systems der irreduciblen Syzygien ist aber nur der erste Schritt auf dem Wege, welcher gemäss den oben in den Abschnitten I, III und IV allgemein entwickelten Principien zur vollen Erkenntniss der gegenseitigen Abhängigkeit der Invarianten führt. Denn zwischen den Syzygien ihrerseits bestehen gleichfalls im Allgemeinen lineare Relationen, sogenannte Syzygien zweiter Art, deren Coefficienten Invarianten sind und welche wiederum selber durch lineare Relationen, sogenannte Syzygien dritter Art, verbunden sind. Was die Fortsetzung des hiedurch eingeleiteten Verfahrens anbetrifft, so muss dasselbe nach einer endlichen Zahl von Wiederholungen nothwendig abbrechen, wie unser Theorem III lehrt, wenn man dasselbe in der vorhin angedeuteten Weise auf nicht homogene Functionen überträgt. Wir gewinnen somit den Satz;

Die Systeme der irreduciblen Syzygien erster Art, zweiter Art u s. f. bilden eine Kette abgeleiteter Gleichungssysteme. Diese Syzygienkette bricht im Endlichen ab und zwar giebt es keinenfalls Syzygien von höherer als der $m+1^{\text{ten}}$ Art, wenn m die Zahl der Invarianten des vollen Systems bezeichnet.

Zur vollständigen Untersuchung eines Invariantensystems bedarf es in jedem besonderen Falle der Aufstellung der ganzen Kette von Syzygien. Nach den Erörterungen des Abschnittes IV sind wir dann in der Lage, die linear unabhängigen Invarianten von vorgeschriebenen Graden anzugeben, und zwar ausgedrückt als ganze rationale Functionen der Invarianten des vollen Systems.

Königsberg in Pr. den 15. Februar 1890.