zwei untereinander sehr verschiedene Weise), daß das Problem der Reihenentwickelung der $\bar{\sigma}$ aufgelöst ist, wenn man irgend welche bez. $\bar{D}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{\Phi}$ kennt.

Es ist auch interessant, zu beweisen (und ich habe es bewiesen), daß alle diese Formentripel etwas Gemeinsames haben.

Nämlich die drei Glieder

$$\tfrac{3}{2} B_w \Omega_v^2 + 3 B_v \Omega_v \Omega_w - 3 A \Phi_w \Phi_v^2,$$

welche in den Ausdruck von $\bar{D}$ eingehen, sind jedenfalls fest und unveränderlich. Dies zieht nach sich, daß $(\delta s)_{v=w}$ immer eine ganze Function wird, welches Tripel man auch für die $\bar{D}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{\Phi}$ gewählt haben mag. Dies konnte vorausgesehen werden, es scheint aber immer interessant eine directe Bestätigung zu haben.

Zur Theorie der algebraischen Gebilde.

(Dritte Note.) [1]

Von

David Hilbert aus Königsberg in Pr.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Die vorliegende Mitteilung ist eine Ergänzung der beiden unlängst unter dem gleichen Titel in diesen Nachrichten veröffentlichten Noten. Die sämmtlichen in diesen beiden Noten abgeleiteten Sätze über algebraische Gebilde beruhen wesentlich auf dem Theoreme I der ersten Note. Diesem Theoreme läßt sich nun eine noch allgemeinere Fassung geben, welche dasselbe auch für Anwendungen auf zahlentheoretische Untersuchungen geeignet macht und, wie folgt, lautet:

Theorem VI. Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ mit ganzzahligen Coefficienten und von beliebigen Ordnungen in den n homogenen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vorgelegt, so giebt es stets eine Zahl m von der Art, daß eine jede Form jener Reihe sich in die Gestalt

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_m F_m$$

bringen läßt, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ geeignete ganzzahlige Formen der nämlichen n Veränderlichen sind.

---

1) Vergl. diese Nachrichten 1888 S. 450 und 1889 S. 25.

Wie man sieht, wird hier im Unterschiede zu der früheren Fassung des Theorems verlangt, daß in gleicher Weise wie die gegebenen Formen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ auch die bei der Darstellung zu verwendenden Formen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Formen mit ganzzahligen Coefficienten sind. Zum Beweise des Theorems bedienen wir uns der folgenden Schlußweise, welche mithin zugleich für Theorem I einen neuen Beweis liefert.

Wir bezeichnen allgemein mit f_s die von der Veränderlichen x_n freien Glieder der Form F_s; sind dann alle Formen der unendlichen Reihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$ identisch Null, so setzen wir

$$F_s^{(1)} = F_s; \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

im anderen Falle sei f_α die erste von Null verschiedene Form der Reihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$, ferner f_β die erste Form derselben Reihe, welche nicht einem Produkte von der Gestalt $a_\alpha f_\alpha$ gleich ist, worin a_α eine ganzzahlige Form der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bedeutet; f_γ sei die erste Form jener Reihe, welche sich nicht in die Gestalt $a_\alpha f_\alpha + a_\beta f_\beta$ bringen läßt, wo a_α und b_β wiederum ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind und in dieser Weise fahren wir fort. Wäre nun unser Theorem VI für den Fall von $n-1$ homogenen Veränderlichen bereits bewiesen und beachten wir, daß in der gewonnenen Formenreihe $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, \ldots$ keine Form durch lineare Combination aus den vorhergehenden Formen erhalten werden kann, so folgt, daß diese Formenreihe notwendig im Endlichen abbrechen muß. Es sei demgemäß f_λ die letzte Form dieser Reihe, so daß stets

$$f_s = a_{\alpha s} f_\alpha + a_{\beta s} f_\beta + \ldots + a_{\lambda s} f_\lambda = l_s(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

gesetzt werden kann, wo $a_{\alpha s}, a_{\beta s}, \ldots, a_{\lambda s}$ ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Bilden wir nun die Ausdrücke

$$F_s^{(1)} = F_s - l_s(F_\alpha, F_\beta, \ldots, F_\lambda), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

so sind dies Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, von denen jede die Veränderliche x_n als Faktor enthält. Wir bezeichnen allgemein mit $x_n f_s^{(1)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(1)}$, welche lediglich mit der ersten Potenz von x_n multiplicirt sind und betrachten die Formen $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$ der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Verschwinden diese Formen sämmtlich, so setzen wir

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)}, \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ist dagegen jede Form der Reihe $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots$ eine lineare Combination der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$, wie folgt

$$f_s^{(1)} = a_{\alpha s}^{(1)} f_\alpha + a_{\beta s}^{(1)} f_\beta + \ldots + a_\lambda^{(1)} a_{\lambda s}^{(1)} f_\lambda = l_s^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

so setzen wir

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda).$$

In jedem anderen Falle sei $f_{\alpha(1)}^{(1)}$ die erste nicht durch lineare Combination aus $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$ hervorgehende Form der Reihe $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \ldots,$ ferner sei $f_{\beta(1)}^{(1)}$ die erste Form dieser Reihe, welche keiner linearen Combination der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots f_\lambda$ $f_{\alpha(1)}^{(1)}$ gleich ist und entsprechend $f_{\gamma(1)}^{(1)}$ die erste nicht durch lineare Combination von $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}$ hervorgehende Form der nämlichen Reihe. Die so entstehende Formenreihe $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, f_{\gamma(1)}^{(1)}, \ldots$ bricht unter der vorhin gemachten Annahme notwendig im Endlichen ab, und wenn $f_{\lambda(1)}^{(1)}$ die letzte Form der Reihe bezeichnet, so finden wir stets

$$f_s^{(1)} = l_s^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda(1)}^{(1)}), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

wo $l_s^{(1)}$ eine lineare homogene Funktion jener Formen bedeutet, deren Coefficienten selber ganzzahlige Formen der $n-1$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sind. Setzen wir daher

$$F_s^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda, F_{\alpha(1)}^{(1)}, F_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, F_{\lambda(1)}^{(1)}),$$

so besitzen die so entstehenden Formen $F_s^{(2)}$ der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämmtlich den Faktor x_n^2. Wir bezeichnen demgemäß allgemein mit $x_n^2 f_s^{(2)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(2)}$, welche lediglich mit der zweiten Potenz der Veränderlichen x_n multiplicirt sind und betrachten die Formen $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \ldots$ der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Sind diese Formen nicht sämmtlich Null beziehungsweise lineare Combinationen der Formen $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda(1)}^{(1)},$ so bezeichne $f_{\alpha(2)}^{(2)}$ die erste nicht in dieser Weise durch lineare Combination entstehende Form jener Reihe; desgleichen sei $f_{\beta(2)}^{(2)}$ die erste nicht durch $f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda(1)}^{(1)}, f_{\alpha(2)}^{(2)}$ linear darstellbare Form in derselben Reihe. Das in dieser Weise eingeleitete Verfahren muß wiederum nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen abbrechen, vorausgesetzt, daß unser Theorem VI für den Fall von $n-1$ Veränderlichen richtig ist. Bezeichnet demgemäß $f_{\lambda(2)}^{(2)}$ die letzte durch jenes Verfahren sich ergebende Form, so wird stets

$$f_s^{(2)} = l_s^{(2)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha(1)}^{(1)}, f_{\beta(1)}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda(1)}^{(1)}, f_{\alpha(2)}^{(2)}, f_{\beta(2)}^{(2)}, \ldots, f_{\lambda(2)}^{(2)}), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

wo $l_s^{(2)}$ eine lineare homogene Funktion bedeutet, deren Coefficienten selber ganzzahlige Formen von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ sind. Setzen wir daher

$$F_s^{(3)} = F_s^{(2)} - l_s^{(2)}(x_n^2 F_\alpha, x_n^2 F_\beta, \ldots, x_n^2 F_\lambda, x_n F'^{(1)}_{\alpha(1)}, x_n F'^{(1)}_{\beta(1)}, \ldots, x_n F'^{(1)}_{\lambda(1)}, F^{(2)}_{\alpha(2)}, F^{(2)}_{\beta(2)}, \ldots, F^{(2)}_{\lambda(2)}), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

so besitzen die so entstehenden Formen $F_s^{(3)}$ sämmtlich den Faktor x_n^3. Wir bezeichnen wiederum allgemein mit $x_n^3 f_s^{(3)}$ diejenigen Glieder der Form $F_s^{(3)}$, welche mit keiner höheren als der dritten Potenz von x_n multiplicirt sind und gelangen so zu einer Formenreihe $f_1^{(3)}, f_2^{(3)}, f_3^{(3)}, \ldots$, welche in entsprechender Weise einer weiterer Behandlung zu unterwerfen ist. Es ist klar, wie die fortgesetzte Wiederholung des angegebenen Verfahrens zu der folgenden Formenreihe führt

$$f^{(\pi)}_{\alpha^{(\pi)}}, f^{(\pi)}_{\beta^{(\pi)}}, \ldots, f^{(\pi)}_{\lambda^{(\pi)}}, f^{(\tau)}_{\alpha^{(\tau)}}, f^{(\tau)}_{\beta^{(\tau)}}, \ldots, f^{(\tau)}_{\lambda^{(\tau)}}, \ldots, \ldots$$

wo $\pi, \tau, \ldots$ gewisse ganze positive Zahlen bedeuten und keine der auftretenden Formen einer linearen Combination der vorhergehenden Formen gleich ist. In Folge des letzteren Umstandes muß auch jene Reihe im Endlichen abbrechen, vorausgesetzt, daß unser Theorem VI für den Fall von $n-1$ Veränderlichen richtig ist. Wir bezeichnen die letzte Form jener Reihe mit $f^{(\omega)}_{\lambda^{(\omega)}}$ und zeigen nun, daß jede Form in der ursprünglich vorgelegten Formenreihe $F_1, F_2, F_3, \ldots$ einer linearen Combination der Formen

$$F^{(\pi)}_{\alpha^{(\pi)}}, F^{(\pi)}_{\beta^{(\pi)}}, \ldots, F^{(\pi)}_{\lambda^{(\pi)}}, F^{(\tau)}_{\alpha^{(\tau)}}, F^{(\tau)}_{\beta^{(\tau)}}, \ldots, F^{(\tau)}_{\lambda^{(\tau)}}, F^{(\omega)}_{\alpha^{(\omega)}}, F^{(\omega)}_{\beta^{(\omega)}}, \ldots, F^{(\omega)}_{\lambda^{(\omega)}}$$

gleich wird. Ist nämlich F_s irgend eine Form der ursprünglich vorgelegten Formenreihe und r die Ordnung dieser Form in Bezug auf die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so betrachten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
F_s^{(r+1)} &= F_s^{(r)} - l_s^{(r)}, \\
F_s^{(r)} &= F_s^{(r-1)} - l_s^{(r-1)}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
F_s^{(1)} &= F_s - l_s,
\end{aligned}$$

wo $l_s^{(r)}, l_s^{(r-1)}, \ldots, l_s$ lineare Combinationen der eben vorhin angegebenen Formen sind. Da ferner die Form $F_s^{(r+1)}$ die Ordnung r besitzt und in Folge ihrer Bildungsweise durch x_n^{r+1} teilbar ist, so ist sie notwendig identisch gleich Null und aus den obigen Gleichungen folgt, daß auch F_s eine lineare Combination der vorhin angegebenen Formen ist. Diese Formen ihrerseits sind aus den Formen

$$F_{\alpha^{(\pi)}}, F_{\beta^{(\pi)}}, \ldots, F_{\lambda^{(\pi)}}, F_{\alpha^{(\tau)}}, F_{\beta^{(\tau)}}, \ldots, F_{\lambda^{(\tau)}}, \ldots, F_{\alpha^{(\omega)}}, F_{\beta^{(\omega)}}, \ldots, F_{\lambda^{(\omega)}}$$

durch lineare Combination entstanden und es ist daher offenbar $m = \lambda^{(\omega)}$ eine Zahl von der Beschaffenheit, wie sie unser Theorem VI verlangt. Das Theorem VI ist mithin für n Veränderliche bewiesen, unter der Voraussetzung, daß dasselbe für $n-1$ Veränderliche gilt. Es ist nun leicht, sich von der Richtigkeit des Theorems für den Fall einer Veränderlichen zu überzeugen, da in diesem Falle jede Form nur aus einem einzigen Gliede besteht und demgemäß auch die vorgelegte Formenreihe eine sehr einfache Behandlung zuläßt.

Auf Grund des eben bewiesenen Theoremes läßt sich, wie in der ersten Note gezeigt worden ist, der Nachweis führen, daß die Invarianten eines beliebigen Systems von Grundformen mit beliebig vielen Veränderlichen jederzeit ganze und rationale Funktionen einer endlichen Anzahl derselben sind. Für binäre Grundformen läßt sich dieser Beweis in eine besonders einfache Fassung bringen, wenn man sich des folgenden in der Inauguraldissertation [1]) des Verfassers bewiesenen Satzes bedient:

Jede homogene und isobare Funktion der Coefficienten einer binären Form

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n$$

vom Grade g in den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und vom Gewichte $p = \frac{ng}{2}$ geht nach Anwendung des Operationssymbols

$$\begin{aligned}[\;] &= 1 - \frac{\Delta D}{1!2!} + \frac{\Delta^2 D^2}{2!3!} - \frac{\Delta^3 D^3}{3!4!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{D\Delta}{1!2!} + \frac{D^2\Delta^2}{2!3!} - \frac{D^3\Delta^3}{3!4!} + \cdots,\end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} D &= a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots \\ \Delta &= n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + (n-2) a_3 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots \end{aligned}$$

zu setzen ist, in eine Invariante jener Grundform über.

Denken wir uns nun nach irgend einer Regel die Invarianten der Grundform in eine unendliche Reihe $i_1, i_2, i_3, \ldots$ geordnet, so lehrt Theorem VI, daß eine jede Invariante sich durch eine

1) Ueber die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen. Königsberg i. Pr. 1885, sowie Mathematische Annalen Bd. 30.

endliche Zahl m derselben in der Gestalt

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \ldots + A_m i_m$$

ausdrücken läßt, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ganze homogene Funktionen der Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind. Wir beachten ferner, daß jede Invariante durch Anwendung der Symbole D und Δ identisch zu Null gemacht wird und erhalten dann aus der obigen Gleichung

$$[i] = [A_1 i_1] + [A_2 i_2] + \ldots + [A_m i_m]$$

oder

$$\begin{aligned} i &= [A_1] i_1 + [A_2] i_2 + \ldots + [A_m] i_m \\ &= \quad J_1 i_1 + \quad J_2 i_2 + \ldots + \quad J_m i_m, \end{aligned}$$

wo $J_1, J_2, \ldots, J_m$ wiederum Invarianten der Grundform sind. Indem wir diese Invarianten derselben Behandlung unterwerfen, wie vorhin die Invariante i, erhalten wir schließlich eine ganze und rationale Darstellung der Invariante i mit Hilfe der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$.

Dieselbe Schlußweise ist für ein System von beliebig vielen binären Grundformen gestattet. Handelt es sich jedoch um Formen mit mehr Veränderlichen oder Veränderlichenreihen, welche theilweise verschiedenen linearen Transformationen unterliegen, so ist das eingeschlagene Verfahren nicht anwendbar, weil bisher diejenigen Sätze noch nicht bekannt sind, welche in der Invariantentheorie der Formen mit mehr Veränderlichen dem vorhin für das binäre Formengebiet ausgesprochenen Satze entsprechen. Dagegen führt das in der ersten Note auseinandergesetzte Verfahren auch im Gebiete der Formen von beliebig vielen Veränderlichen zu dem gewünschten Beweise der Endlichkeit des vollen Formensystems.

In den bisherigen Untersuchungen legten wir den von Cayley eingeführten Invariantenbegriff zu Grunde, indem wir lediglich diejenigen ganzen homogenen Funktionen der Coefficienten der Grundformen betrachteten, welche gegenüber jeder beliebigen linearen Transformation der Variablen die Invarianteneigenschaft besitzen. Es hat jedoch seitdem der Begriff der Invariante eine wesentliche Ausbildung und Erweiterung durch die Arbeiten von F. Klein[1]) und S. Lie[2]) erfahren. Um zu diesem allgemeinen Begriff der Invariante zu gelangen, wählen wir eine bestimmte

---

1) Vergl. die Programmschrift: »Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.« Erlangen 1872.

2) Vergl. die Vorrede des Werkes: »Theorie der Transformationsgruppen.« Leipzig 1888.

Untergruppe der allgemeinen Gruppe der linearen Transformationen aus und betrachten diejenigen ganzen homogenen Funktionen der Coefficienten der Grundformen, denen nur mit Rücksicht auf die Substitutionen der gewählten Untergruppe die Invarianteneigenschaft zukommt. Es entsteht nun die Frage, ob unsere früheren Entwickelungen auch auf diese Invarianten sich übertragen lassen und insbesondere zum Nachweis der Existenz eines endlichen Invariantensystems ausreichend sind. Denn obwohl unter den einer bestimmten Untergruppe zugehörigen Invarianten offenbar alle Invarianten im früheren Sinne enthalten sind, so folgt doch aus unseren bisherigen Sätzen über die Endlichkeit der vollen Invariantensysteme noch nicht, daß auch unter den Invarianten im erweiterten Sinne sich jederzeit eine endliche Zahl auswählen läßt, durch welche jede andere Invariante der nämlichen Art ganz und rational ausgedrückt werden kann. Es zeigt sich nun in der That, daß unsere Schlußweise sich auf gewisse und zwar besonders interessante Substitutionengruppen ohne Schwierigkeit übertragen läßt. Sind nämlich die unsere Substitutionengruppe bestimmenden Substitutionscoefficienten ganze und rationale Funktionen einer beschränkten Anzahl von Parametern, so kann der Umstand eintreten, daß durch Zusammensetzung zweier beliebigen Substitutionen der Gruppe eine Substitution entsteht, deren Parameter bilineare Funktionen der Parameter der beiden ursprünglich ausgewählten Substitutionen sind und daß es zugleich einen Differentiationsproceß giebt, welcher sich in entsprechender Weise zur Erzeugung der zur vorgelegten Gruppe gehörigen Invarianten verwenden läßt, wie der Differentiationsproceß Δ [1]) im Falle der zur allgemeinen linearen Gruppe gehörigen Invarianten. Für solche Substitutionengruppen ergiebt sich stets durch unser Schlußverfahren die Endlichkeit des zur Gruppe gehörigen Invariantensystems. Als Beispiel diene die Gruppe aller eine bestimmte quadratische quaternäre Form in sich überführenden linearen Substitutionen, sowie die Gruppe derjenigen linearen Substitutionen im Raume, bei denen eine bestimmte Raumcurve dritter Ordnung ungeändert bleibt.

Im Vorstehenden haben wir den bereits in Theorem I und II der ersten Note dargelegten und in Theorem VI von neuem zum Ausdruck gebrachten Gesichtspunkt für die Theorie der algebraischen Invarianten verwerthet. In der zweiten Note ist gezeigt worden, daß jenes Princip nicht ausschließlich auf invariantentheoretische Anwendungen beschränkt ist, sondern ebensosehr in der

1) Vergl. S. 453 in der ersten Note: »Zur Theorie der algebraischen Gebilde«.

Theorie der Modulsysteme sich als fruchtbar erweist. Bei diesen allgemeineren Untersuchungen dient nothwendigerweise das Theorem V der zweiten Note als Grundlage.

Ist ein beliebiges Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ vorgelegt, wo $M_1, M_2, \ldots, M_m$ homogene Formen der n Veränderlichen bedeuten und bezeichnen wir allgemein mit c_ξ die Zahl aller derjenigen Formen von der Ordnung ξ, aus denen sich in linearer Weise mit Hülfe constanter Multiplikatoren keine nach dem Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ der Null congruente Form der nämlichen Ordnung ξ zusammensetzen läßt, so ist die unendliche Zahlenreihe $c_1, c_2, c_3, \ldots$ von einem gewissen Elemente an eine arithmetische Reihe von der Ordnung ν, wo ν eine dem Modulsystem charakteristische Constante bezeichnet. Es folgt diese Thatsache aus dem Umstande, daß gemäß der Bedeutung der in der zweiten Note eingeführten charakteristischen Funktion $\chi(\xi)$ eines Modulsystems für genügend große Werthe von ξ jederzeit

$$c_\xi = \chi(\xi)$$

wird. Rechnen wir nun alle diejenigen Modulsysteme, für welche jene Zahlenreihen elementweise genau übereinstimmen, zu der nämlichen Klasse, so gilt für Modulsysteme mit zwei homogenen Veränderlichen x_1, x_2 der folgende Satz, dessen Beweis auf den in der zweiten Note mit Hülfe des Theorems V gewonnenen Resultaten beruht:

Wenn zwei binäre Modulsysteme der nämlichen Klasse angehören, so kann man stets von dem einen Modulsystem durch continuirliche Aenderung der Coëfficienten der dasselbe bestimmenden Formen zu dem anderen Modulsysteme gelangen, so daß die Klasse der bei dem Uebergange entstehenden Modulsysteme fortdauernd dieselbe bleibt.

Dieser Satz enthält offenbar den Kern für eine auf Grund der dargelegten Principien zu entwickelnden Theorie der binären Modulsysteme.

Königsberg, den 30. Juni 1889.

schluss an die in Bd. 18 gegebene physikalisch anschauliche Betrachtung der Laméschen Functionen das Theorem aus Bd. 19 für den Fall hyperelliptischer Gebilde mit reellen Verzweigungspuncten direct begründen kann: ich will eben heute darüber vortragen und bald publiciren.[4] Ich schreibe dies wesentlich, um Sie zu bestimmen, wenn Sie im Herbst doch nach Bremen gehen auf längere Tage auch nach Göttingen zu kommen. In der That hoffe ich bis dahin in einem allgemeinen die lin. Diff. glch. 2. Ordnung und ihre Realitätstheoreme durchziehenden Gedankengange so weit vorgeschritten zu sein, dass ich mir nicht nur von Ihnen erzählen zu lassen brauche sondern auch einige Anregung von mir aus dazu fügen kann. Ich schrieb vor ca. 14 Tagen an Hurwitz wegen analoger Zusammenkunft in den Osterferien. Hat er doch meinen Brief bekommen? Ich würde gern recht bald bestimmte Vorschläge hierüber von seiner Seite haben. Beste Grüsse von Ihrem

F. Klein.

Es freut mich dass Eberhard sich zugänglich erweist.

[1] Vgl. Brief 53, Anm. 1.
[2] Vgl. Brief 33, Anm. 2 und Brief 55, Anm. 1.
[3] Vgl. Brief 1, Anm. 11.
[4] Vgl. „Zur Theorie der allgemeinen Laméschen Funktionen" in [Kl], Bd. 2, Nr. LXIV.

55 Hilbert an Klein

Königsberg d. 3. 3. 1890.

Hochgeehrter Herr Professor.

Ueber Ihren freundlichen Brief habe ich mich sehr gefreut.

Meine Bemerkung über die Fläche 4ter Ordnung stimmt in der That genau mit dem von Ihnen in Annalen 18 erhaltenen Resultate überein. Nur ist meine Construktion solcher Flächen etwas von der Ihrigen abweichend.[1]

Was Ihren Vorschlag anbetrifft, im Herbst nach Göttingen zu kommen, so bin ich sehr gern dabei. Ich werde mir dann ein Rundreisebillet über Bremen und von da nach Göttingen (vielleicht auch Marburg) zusammenstellen und Ihnen zur Zeit das Nähere schreiben. Jedenfalls möchte ich erst *nach* dem Besuche der Bremer Versammlung[2] zu Ihnen kommen, was hoffentlich auch Ihnen recht ist.

Hurwitz lässt Sie grüssen und wird in den nächsten Tagen vor seiner Abreise nach Hildesheim noch einmal an Sie schreiben. Ich erhielt von ihm den Brief von Herrn Professor Gordan über meine Arbeit.[3]

Das in diesem Briefe ausgesprochene Urteil erscheint mir als ein aussergewöhnlich hartes.[4] Herr Professor Gordan erklärt mit der Arbeit – also doch überhaupt mit der ganzen Arbeit – „sehr unzufrieden" zu sein und spricht einen Vorwurf nur gegen einen ganz besonderen Theil derselben, nämlich gegen die Fassung (?) oder Art des ersten Beweises meines Theorems I aus.

Was nun dieses Theorem I anbetrifft, so habe ich dasselbe vor $1^1/_2$ Jahren zuerst gefunden und bewiesen. Der Beweis wurde in den Göttinger Nachrichten publicirt. Seitdem habe ich mit mehreren Mathematikern über diesen Satz und seinen Beweis mich mündlich unterhalten und mit einigen (Cayley und Netto) correspondirt. Stets habe ich es hierbei im Auge gehabt, Erfahrungen zu sammeln darüber, welche Punkte dem Hörer oder Leser die meisten Schwierigkeiten verursachen. Diese Erfahrungen habe ich insbesondere zu verwerten gesucht, als ich meinen Zuhörern im Colleg gegen Mitte dieses Semesters den Beweis vortrug. Auch habe ich mich durch persönliche Rücksprache mit einem meiner Zuhörer davon überzeugt, dass der Beweis verstanden worden ist. Auf diese Weise kam der Beweis in die Gestalt, welche ich in meiner Arbeit dargelegt habe und welche mir dem ursprünglich in den Göttinger Nachrichten veröffentlichten Beweise gegenüber als ein nicht unerheblicher Fortschritt erscheint. Die Auseinandersetzung dieser Entstehungsgeschichte soll dazu dienen, um die *eine* – so zu sagen – persönliche Seite des von Herrn Professor Gordan erhobenen Vorwurfes als ungerechtfertigt zurückzuweisen: nämlich den Vorwurf, als hätte ich es „verschmäht, die Gedanken nach formalen Regeln auseinanderzulegen", und als hätte ich mich damit begnügt, wenn nur niemand meinem Beweise „widerspräche". Im Gegenteil gerade auf die Auseinanderlegung der einzeln Schritte im Beweise habe ich die grösste mir mögliche Sorgfalt verwandt. Uebrigens habe ich niemals über diesen Beweis mit Herrn Professor Gordan gesprochen – denn derselbe ist, wie gesagt, in der vorliegenden Gestalt erst während dieses Semesters entstanden. Während meiner Zusammenkunft mit Herrn Professor Gordan in Leipzig war, soweit ich mich erinnere, nur von dem Beweise des Theorems II (in Abschnitt II) die Rede.

Ich komme nun auf die sachliche Seite des von Herrn Professor Gordan ausgesprochenen Tadels und finde da, dass Herr Professor Gordan lediglich eine Reihe sehr beherzigenswerter, aber ganz allgemein gehaltener Regeln für die Abfassung mathematischer Arbeiten erörtert und da, wo ich einen Ansatz zu einer Specialisirung des Tadels zu entdecken hoffte – nämlich an der Stelle, wo Herr Professor Gordan „jedes Einteilungsprincip vermisst" – hört für mich die Auseinandersetzung des Herrn Professor Gordan auf, verständlich zu sein. Wenn es Herrn Professor Gordan gelingt, auf Grund einer „Einteilung aller Formen" und eines Schlusses von „einfacheren auf verwickeltere Formen" mein Theorem I zu beweisen, so ist dies eben ein anderer Beweis und ich werde mich freuen, wenn derselbe einfacher ist als der meine – vorausgesetzt, dass dabei doch jeder einzelne Schluss ebenso zwingend und kurzgezäumt ist, wie bei meinem Beweise.

Im Uebrigen möge der verklagte Beweis selber sein eigener Rechtsanwalt sein und ich persönlich tröste mich damit, dass für einen Sterblichen es überhaupt ein unmöglich Ding ist, die Worte so zu setzen, dass auch nicht ein Tüpfelchen daran gerührt werden kann.

So gerne ich auch sonst jeden Rat mit Freuden und ohne jede Empfindlichkeit annehme, – in diesem Falle bin ich nicht in der Lage, irgend etwas abzuändern

oder zurückzunehmen und d
– mein letztes Wort, solange
gegen meine Schlussweise er

P. S. Beiliegend folgt der B

[1] Vgl. Brief 33, Anm. 2 und
Ann. 18 (1881), 160, wo Klein na
kann, welche aus neun getrennt
hang aufweist.

[2] Vgl. Brief 56, Anm. 2.

[3] Betrifft die Arbeit [Hi], Bd.

[4] Dieser Brief vom 24. Februa
Inhalt: ... Sie verlangen meine A
Leider muss ich Ihnen sagen,
ja sehr wichtig und auch richtig
vielmehr auf den Beweis seines F
gen, welche man an einen mathe
wegs, dass sich der Verfasser sel
Beweis nach festen Regeln aufba
Es handelt sich hier um ein Re
fertigt. Er darf die Annahme ma
ner die Annahme machen, dass
gern, dass jede Form G seiner R

$$G = g_1 y^{r-1} + g_2 y^{r-2} + \ldots$$

wo die g von $n-1$ Variablen ab
Von dieser Stelle an vermisse
mache ich folgenden Anspruch:
getroffen werden, dann erst da
schliessen. Dieser Anspruch wird
nicht an der Form, dem würde si
bert hat es verschmäht seine G
meint, es genüge, dass niemand
nung. Damit kann er Niemanden
die Regeln des Ein mal eins. Ich h
weise nicht zusagt; er verlässt si
Sätze ausreicht. Das mag für die
arbeit reicht es nicht aus ...

ch gegen die Fassung (?) oder

dasselbe vor $1^1/_2$ Jahren zuerst
Göttinger Nachrichten publi-
i über diesen Satz und seinen
Cayley und Netto) correspon-
hrungen zu sammeln darüber,
Schwierigkeiten verursachen.
erten gesucht, als ich meinen
en Beweis vortrug. Auch habe
meiner Zuhörer davon über-
iese Weise kam der Beweis in
abe und welche mir dem ur-
ichten Beweise gegenüber als
useinandersetzung dieser Ent-
o zu sagen – persönliche Seite
urfes als ungerechtfertigt zu-
s „verschmäht, die Gedanken
hätte ich mich damit begnügt,
Im Gegenteil gerade auf die
abe ich die grösste mir mögli-
über diesen Beweis mit Herrn
ie gesagt, in der vorliegenden
Während meiner Zusammen-
soweit ich mich erinnere, nur
die Rede.
errn Professor Gordan ausge-
r Gordan lediglich eine Reihe
ner Regeln für die Abfassung
en Ansatz zu einer Specialisi-
ler Stelle, wo Herr Professor
für mich die Auseinanderset-
zu sein. Wenn es Herrn Pro-
ng aller Formen" und eines
n" mein Theorem I zu bewei-
e mich freuen, wenn derselbe
i doch jeder einzelne Schluss
em Beweise.
in eigener Rechtsanwalt sein
Sterblichen es überhaupt ein
h nicht ein Tüpfelchen daran

d ohne jede Empfindlichkeit
ge, irgend etwas abzuändern

oder zurückzunehmen und das ist bei dieser Arbeit – in aller Bescheidenheit gesagt – mein letztes Wort, solange nicht ein bestimmter und unwiderleglicher Einwand gegen meine Schlussweise erhoben wird. Mit ergebenstem Grusse

hochachtungsvoll
David Hilbert.

P. S. Beiliegend folgt der Brief von Herrn Professor Gordan.

クラインアーカイヴの
ヒルベルトのファイルにあるではつ

[1] Vgl. Brief 33, Anm. 2 und Klein, „Bemerkung über Flächen vierter Ordnung", Math. Ann. 18 (1881), 160, wo Klein nachweist, daß man eine Fläche vierter Ordnung konstruieren kann, welche aus neun getrennten Teilen besteht, von denen einer ringartigen Zusammenhang aufweist.

[2] Vgl. Brief 56, Anm. 2.

[3] Betrifft die Arbeit [Hi], Bd. 2, Nr. 16. Vgl. auch Brief 53, Anm. 1.

[4] Dieser Brief vom 24. Februar von Gordan an Klein (Sign.: Klein 9,461) hat folgenden Inhalt: ... Sie verlangen meine Ansicht über die Hilbert'sche Arbeit.

Leider muss ich Ihnen sagen, dass ich sehr unzufrieden mit derselben bin. Die Dinge sind ja sehr wichtig und auch richtig, also darauf geht mein Tadel nicht. Derselbe bezieht sich vielmehr auf den Beweis seines Fundamentalsatzes, welcher den bescheidensten Anforderungen, welche man an einen mathematischen Beweis macht, nicht entspricht. Es genügt keineswegs, dass sich der Verfasser selbst die Sache klar macht, sondern man verlangt, dass er den Beweis nach festen Regeln aufbaut.

Es handelt sich hier um ein Rekursionsverfahren. Der Schluss von n auf $n+1$ ist gerechtfertigt. Er darf die Annahme machen, sein Satz gelte bereits für $n-1$ Variable. Er darf ferner die Annahme machen, dass der Coefficient von y^r konstant ist. Hieraus kann man folgern, dass jede Form G seiner Reihe so geschrieben werden kann:

$$G = g_1 y^{r-1} + g_2 y^{r-2} + \dots,$$

Klein 9
S. 70-72

wo die g von $n-1$ Variablen abhängen.

Von dieser Stelle an vermisse ich jedes Eintheilungsprinzip. Bei jedem Rekursionsbeweise mache ich folgenden Anspruch: Zuvörderst muss eine völlig klare Eintheilung aller Formen getroffen werden, dann erst darf ich von den einfacheren auf die verwickelteren Formen schliessen. Dieser Anspruch wird nicht erfüllt; dann ist der Beweis schlecht. Der Fehler liegt nicht an der Form, dem würde sich sonst leicht ab helfen lassen; er liegt aber viel tiefer. Hilbert hat es verschmäht seine Gedanken nach formalen Regeln aus einander zu legen; er meint, es genüge, dass niemand seinem Beweise widerspricht, dann wäre schon alles in Ordnung. Damit kann er Niemanden belehren; nur das kann ich lernen, was mir so klar wird, wie die Regeln des Ein mal eins. Ich habe es Ihnen wohl in Leipzig gesagt, dass mir seine Schlussweise nicht zusagt; er verlässt sich aber darauf, dass die Wichtigkeit und Richtigkeit seiner Sätze ausreicht. Das mag für die erste Erfindung gelten aber für eine ausführliche Annalenarbeit reicht es nicht aus ...

ausreichen suffice