Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

30. Januar. **№ 2.** 1889.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung den 5. Januar.

de Lagarde kündigt einen Aufsatz des Herrn Prof. A. Erman in Berlin, Korresp. der Gesellschaft an: »Ueber die Sprache des Papyrus Westcas«.

Klein legt von Herrn Dr. Hilbert in Königsberg i. Pr. vor: »Zur Theorie der algebraischen Gebilde. Zweite Note.«

Schwarz legt von Herrn Dr. O. Hölder vor

1. »Bemerkung zur Quaternionentheorie«.
2. »Ueber einen Mittelwerthssatz«.

Sauppe legt einen Aufsatz von Herrn Prof. Ignazio Guidi in Rom, Korresp. der Gesellschaft, vor: »Le traduzioni dal Copto«.

Zur Theorie der algebraischen Gebilde.
(Zweite Note)[1].

Von

David Hilbert aus Königsberg in Pr.

Vorgelegt von Felix Klein.

In einer vor kurzem unter gleichem Titel veröffentlichten Mittheilung ist von mir ein Princip entwickelt worden, dessen Kraft sich vornehmlich da bewährt hat, wo es auf den Nachweis der Endlichkeit gewisser Systeme von algebraischen Formen ankommt. Aber die Anwendbarkeit desselben ist auf derartige Fragen keineswegs beschränkt und die vorliegende Note soll zeigen,

1) Vgl. 1888 S. 450 ff.

wie der in jener ersten Mittheilung dargelegte Gesichtspunkt insbesondere zu einer einheitlichen und übersichtlichen Behandlung der charakteristischen Zahlen (Dimension, Ordnung, Geschlechter, Rang, etc.) eines algebraischen Gebildes führt.

Sind A_{11}, A_{12}, ..., A_{lm} gegebene ganze Funktionen der n homogenen Variablen x_1, x_2, ..., x_n, so besitzt nach Theorem III das System von l Gleichungen

$$A_{s1}X_1 + A_{s2}X_2 + \dots + A_{sm}X_m = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l)$$

eine endliche Zahl p von Lösungen

$$X_t = X_{t1},\ X_t = X_{t2},\ \dots,\ X_t = X_{tp} \quad (t = 1, 2, \dots m)$$

von der Eigenschatt, daß jedes andere jenen Gleichungen genügende Funktionensystem sich in die Gestalt

$$X_t = Y_1 X_{t1} + Y_2 X_{t2} + \dots + Y_p X_{tp} \quad (t = 1, 2, \dots m)$$

bringen läßt, wo Y_1, Y_2, ..., Y_p ebenfalls ganze und homogene Funktionen jener n Variablen sind. Unter den p Lösungssystemen möge überdies keines vorhanden sein, welches bereits aus den übrigen durch lineare Combination erhalten werden kann. Wir betrachten nunmehr die Formen X_{11}, X_{12}, ..., X_{mp} als bekannt und bestimmen für die Gleichungen:

$$Y_1 X_{t1} + Y_2 X_{t2} + \dots + Y_p X_{tp} = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, m)$$

das volle System von Lösungen

$$Y_s = Y_{s1},\ Y_s = Y_{s2},\ \dots,\ Y_s = Y_{sq} \quad (s = 1, 2, \dots, p)$$

derart, daß jede andere Lösung die Gestalt

$$Y_s = Z_1 Y_{s1} + Z_2 Y_{s2} + \dots + Z_q Y_{sq} \quad (s = 1, 2, \dots, p)$$

annimmt. Wenden wir dann dasselbe Verfahren auf das Gleichungssystem

$$Z_1 Y_{s1} + Z_2 Y_{s2} + \dots + Z_q Y_{sq} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, p)$$

an, so gilt der folgende für unsere weiteren Entwickelungen grundlegende Satz:

Theorem V. Ist ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$A_{s1}X_1 + A_{s2}X_2 + \dots + A_{sm}X_m = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l)$$

vorgelegt, so führt die Aufstellung der Identitäten zwischen den Lösungen desselben zu einem zweiten Gleichungssystem von derselben Gestalt; aus diesem abgeleiteten Gleichungssysteme entspringt in gleicher Weise ein drittes u. s. f. Das so gekennzeichnete Verfahren erreicht stets ein Ende und zwar spätestens nach n-maliger Anwendung, d. h. in der Reihe jener Gleichungssysteme tritt an n^{ter} oder bereits an früherer Stelle ein Gleichungssystem auf, welches keine Lösung mehr besitzt.

Der Beweis dieses Theorems ist nicht ohne Mühe. Durch geeignete Behandlung des vorgelegten Gleichungssystems gelingt es dem abgeleiteten Gleichungssystem eine solche Gestalt zu ertheilen, daß nur eine beschränkte Zahl der Lösungen dieses abgeleiteten Gleichungssystems sämmtliche n Variablen enthält, während dagegen alle übrigen Lösungen von einer jener n Variablen etwa von x_n frei sind. Durch Fortführung dieser Schlußweise und unter Benutzung des Theorems II. wird der Fall von n Variablen auf denjenigen von $n-1$ Variablen zurückgeführt. Um nun die Richtigkeit des Theorems für den Fall $n = 2$ zu erkennen, legen wir die Gleichung

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_m X_m = 0$$

zu Grunde, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gegebene binäre Formen von der p^{ten} Ordnung sind. Das volle Lösungssystem dieser Gleichung besteht genau aus $m-1$ Lösungen. Ist nämlich irgend ein System von m Lösungen jener Gleichung vorgelegt, so lassen sich offenbar stets m binäre Formen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ von der Art finden, daß die Relationen

$$Y_1 X_{s1} + Y_2 X_{s2} + \ldots + Y_m X_{sm} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

identisch erfüllt sind. Bezeichnen wir nun die den Formen X_{1t}, $X_{2t}, \ldots, X_{mt}$ gemeinsame Ordnung mit π_t und bestimmen einen Linearfaktor von Y_m, so lassen sich unter der Voraussetzung

$$\pi_1 \leqq \pi_2 \leqq \ldots \leqq \pi_m$$

die m Lösungen der gegebenen Gleichung durch lineare Combination derart umgestalten, daß jener Linearfaktor in dem für die neuen Lösungen gültigen Relationensystem überall unterdrückt werden kann. Wird das hiedurch angedeutete Verfahren solange wiederholt, bis sich die Linearfaktoren der Form Y_m erschöpft haben, so ergiebt sich schließlich ein Relationensystem von der Gestalt

$$X_{sm} = a_1 X_{s1} + a_2 X_{s2} + \ldots + a_{m-1} X_{sm-1}, \quad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ wiederum binäre Formen sind. In Folge dieses Ergebnisses ist die m^{te} Lösung überflüssig und man erkennt somit, daß die Lösungen eines vollen Lösungssystems der vorgelegten Gleichung sich stets durch gewisse $m-1$ Lösungen ersetzen lassen, welche durch kein weiteres Relationensystem unter einander verknüpft sind d. h.: Bereits das aus der ursprünglichen Gleichung abgeleitete Gleichungssystem ist ein solches, welches keine Lösung besitzt. Es bietet keine Schwierigkeit, dieses Ergebniß auf den Fall mehrerer Gleichungen zu übertragen, deren Coëfficienten binäre Formen von beliebigen Ordnungen sind. Das vorhin ausgesprochene Theorem ist alsdann in der That für das binäre Formengebiet und damit zugleich allgemein als richtig erkannt.

Zur Erläuterung des Theorems diene das Beispiel der Normcurve im vierdimensionalen Raume. Die ursprüngliche Gleichung ist in diesem Fall von der Gestalt

$$\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \ldots + \varphi_6 X_6 = 0,$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$ die 6 in der ersten Note angegebenen quadratischen Formen der 5 homogenen Coordinaten bedeuten. Das abgeleitete Gleichungssystem enthält 8 Gleichungen und schon das dritte aus 3 Gleichungen bestehende Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

Von principieller Bedeutung ist die Behandlung der Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + \ldots + x_n X_n = 0;$$

dieselbe giebt nämlich einen Beleg für den Fall, in welchem das in Rede stehende Verfahren thatsächlich erst nach n maliger Anwendung ein Ende erreicht.

Um im Folgenden eine kürzere Ausdrucksweise zu ermöglichen und überdies leichter an bekannte Anschauungen und geläufige Begriffe anknüpfen zu können, nehmen wir an, daß an Stelle eines Systems von Gleichungen nur eine einzige Gleichung von der Gestalt

$$M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_m X_m = 0$$

zu Grunde liege, wo $M_1, M_2, \ldots, M_m$ gegebene Formen der n homogenen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit bestimmten Zahlencoëfficienten und von beliebigen Ordnungen sind. Wir bestimmen zunächst die Zahl der linear von einander unabhängigen Formen M von der ξ^{ten} Ordnung, welche Ausdrücken von der Gestalt

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_m X_m$$

identisch gleich sind. Es ist zu diesem Zwecke nur nöthig die Gesammtzahl der in $X_1, X_2, \ldots, X_m$ auftretenden bei der Darstellung verfügbaren Coëfficienten um die Zahl der von einander unabhängigen Formensysteme $X_1, X_2, \ldots, X_m$ zu vermindern, für welche der obige Ausdruck M von der ξ^{ten} Ordnung identisch verschwindet. Die letztere Zahl hängt, wie die Fortsetzung der angedeuteten Schlußweise zeigt, von der Ordnung der in der Reihe der abgeleiteten Gleichungssysteme als Coëfficienten auftretenden Formen ab. Vermindern wir nun die Zahl der überhaupt vorhandenen linear unabhängigen Formen der ξ^{ten} Ordnung um die eben berechnete Zahl der in obiger Gestalt darstellbaren Formen M, so ergiebt sich die Zahl der linear von einander unabhängigen Bedingungen, welchen die Coëfficienten einer Form der ξ^{ten} Ordnung genügen müssen, damit dieselbe in obige Gestalt gebracht werden kann. Die auf diese Weise berechnete Zahl wird, falls die Ordnung ξ oberhalb einer bestimmten Grenze liegt, durch eine und dieselbe ganze Funktion von ξ ausgedrückt. Da diese Funktion $\chi(\xi)$ für ganzzahlige Argumente nothwendig ganze Zahlen darstellen muß, so können wir setzen

$$\chi(\xi) = \chi_0 + \chi_1 \binom{\xi}{1} + \chi_2 \binom{\xi}{2} + \cdots + \chi_\nu \binom{\xi}{\nu}, \quad (\nu < n)$$

wo $\binom{\xi}{1}, \binom{\xi}{2}, \ldots, \binom{\xi}{\nu}$ die Binomialcoëfficienten und $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$ bestimmte von der Natur der Formen $M_1, M_2, \ldots, M_m$ abhängige und daher für die gegebene Gleichung charakteristische ganze Zahlen sind. Der eben angedeutete Beweis für die Existenz der Funktion $\chi(\xi)$ beruht, wie man sieht, wesentlich auf Theorem V.

Die folgenden Auseinandersetzungen lehnen an diejenige Bezeichnungsweise und Begriffsbestimmung an, welche L. Kronecker in der von ihm begründeten und neuerdings systematisch ausgebildeten Theorie der Modulsysteme [1]) anwendet. Doch sei im Voraus bemerkt, daß im Unterschiede zu den von L. Kronecker behandelten Fragen in unserer Untersuchung die Homogenität der Moduln $M_1, M_2, \ldots, M_m$ bezüglich der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine wesentliche und nothwendige Voraussetzung bildet. Die bisherigen Ergebnisse werden nunmehr, wie folgt, zusammengefaßt:

Die Coëfficienten einer Form von einer genügend hohen Ordnung ξ in den n homogenen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ müssen genau $\chi(\xi)$ von einander unabhängige lineare Bedingungen erfüllen, damit die Form nach einem gegebenen Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ congruent Null sei. Die ganze Funktion $\chi(\xi)$ heiße die „charakteristische Funktion“ jenes Modulsystems.

Wir wenden diese allgemeinen Betrachtungen zunächst auf

---

1) L. Kronecker, Crelle's Journal, Bd. 92, pag. 70—122, Bd. 93, pag. 365—366, Bd. 99, pag. 329—371, Bd. 100, pag. 490—510. Berliner Sitzungsberichte, 1888 pag. 249—258, 263—281, 331—352, 379—396, 615—648. Vergl. ferner: R. Dedekind und H. Weber, Crelle's Journal, Bd. 92, pag. 181—235, sowie J. Molk, Acta mathematica Bd. 6, pag. 50—165.

den vorhin ausführlicher besprochenen Fall an, in welchem M_1, $M_2, \ldots, M_m$ sämmtlich binäre Formen von der p^{ten} Ordnung sind. Das volle Lösungssystem der Gleichung besteht dann unseren früheren Auseinandersetzungen zufolge aus $m-1$ von einander unabhängigen Lösungen und wenn wir die Ordnungen dieser $m-1$ Lösungen bezüglich mit $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-1}$ bezeichnen, so ergiebt sich für die charakteristische Funktion des Modulsystems $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ der constante Werth

$$\chi(\xi) = \chi_0 = p - \pi_1 - \pi_2 - \ldots - \pi_{m-1}.$$

Besitzen nun die Formen $M_1, M_2, \ldots, M_m$ nicht sämmtlich einen gemeinsamen Theiler, so läßt sich offenbar jede Form M von der Ordnung $\xi \geqq 2p-1$ in die Gestalt

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_m X_m$$

bringen und die charakteristische Funktion ist daher nothwendig Null. Auf diese Weise gewinnen wir den folgenden Satz:

Besitzen die binären Formen $M_1, M_2, \ldots, M_m$ von der p^{ten} Ordnung nicht sämmtlich einen gemeinsamen Faktor, so besteht das volle Lösungssystem der Gleichung

$$M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots + M_m X_m = 0$$

jederzeit aus $m-1$ von einander unabhängigen Lösungen von der Eigenschaft, daß die Summe der Ordnungen dieser Lösungen der Zahl p genau gleichkommt.

Diesen Satz hat bereits F. Meyer[1]) vermuthet und als Postulat bei seinen Untersuchungen über reducible Funktionen verwendet.

Was das Beispiel der Normcurve im vierdimensionalen Raume betrifft, so ergiebt übereinstimmend die direkte Ueberlegung sowie die in der ersten Note an der betreffenden Stelle ausgeführte Rechnung für die charakteristische Funktion des Modulsystems $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6)$ den Werth $4\xi + 1$.

Das Modulsystem $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ besitzt offenbar die charakteristische Funktion Null und das Gleiche gilt für jedes Modulsystem, welches irgend n Formen mit nicht verschwindender Resultante enthält. Für das ternäre Formengebiet vergleiche man den am Schlusse der ersten Note ausgesprochenen Satz.

Man sieht leicht ein, wie die gekennzeichnete Methode sich für die Theorie der algebraischen Gebilde verwenden läßt. Ist beispielsweise im dreidimensionalen Raume eine Curve oder ein

1) Mathematische Annalen, Bd. 30, pag. 38.

System von Curven und Punkten gegeben, so kann man nach einem in der ersten Note bewiesenen Satze durch dieses Gebilde stets eine endliche Zahl von Flächen

$$M_1 = 0, \; M_2 = 0, \; \ldots, \; M_m = 0$$

solcher Art hindurchlegen, daß jede andere das Gebilde enthaltende Fläche durch eine Gleichung von der Gestalt

$$X_1 M_1 + X_2 M_2 + \ldots + X_m M_m = 0$$

ausgedrückt wird. Es ist somit offenbar, daß jedem algebraischen Gebilde ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ und durch dessen Vermittelung eine bestimmte charakteristische Funktion $\chi(\xi)$ zugehört. Die letztere Funktion giebt dann an, wie viele von einander unabhängige Bedingungen eine Fläche von der oberhalb einer gewissen Grenze liegenden Ordnung ξ erfüllen muß, damit sie das betreffende Gebilde enthalte. So hat die charakteristische Funktion einer doppelpunktslosen Raumcurve von der Ordnung μ und dem Geschlecht p den Werth [1])

$$\chi(\xi) = 1 - p + \mu\xi.$$

Entsprechende Thatsachen gelten für beliebige algebraische Gebilde im n dimensionalen Raume. Findet man nämlich für die charakteristische Funktion eines algebraischen Gebildes den Werth

$$\chi(\xi) = \chi_0 + \chi_1 \binom{\xi}{1} + \chi_2 \binom{\xi}{2} + \ldots + \chi_\nu \binom{\xi}{\nu},$$

so ist stets ν die Dimension und χ_ν die Ordnung des Gebildes, während die übrigen Coëfficienten $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{\nu-1}$ mit den von M. Noether [2]) definirten und behandelten Geschlechtszahlen des Gebildes in engem Zusammenhange stehen. Inwiefern umgekehrt ein Modulsystem durch die Gesammtheit der Werthsysteme bestimmt ist, welche die einzelnen Moduln gleichzeitig zu Null machen, ist eine Frage, welche erst durch eine systematische und alle möglichen Ausnahmefälle umfassende Untersuchung des Noetherschen Fundamentalsatzes für beliebige Dimensionenzahl eine befriedigende und allgemeingültige Beantwortung finden kann.

Wir kehren zur Betrachtung der allgemeinen Modulsysteme zurück und stellen einen auf die charakteristische Funktion derselben bezüglichen Satz auf. Sind irgend zwei Modulsysteme $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ und $(L_1, L_2, \ldots, L_l)$ gegeben, so stelle man zunächst für die Gleichung

1) Vergl. M. Noether, Crelle's Journal Bd. 93, pag. 295.

2) Mathematische Annalen Bd. 2 und 8.

$$M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_m X_m = L_1 Y_1 + L_2 Y_2 + \dots + L_l Y_l$$

das volle Lösungssystem

$$\begin{gathered} X_1 = X_{1s},\ X_2 = X_{2s},\ \dots,\ X_m = X_{ms}, \\ Y_1 = Y_{1s},\ Y_2 = Y_{2s},\ \dots,\ Y_l = Y_{ls} \\ (s = 1, 2, \dots, k) \end{gathered}$$

auf und bilde dann vermöge der Formeln

$$\begin{gathered} K_s = M_1 X_{1s} + M_2 X_{2s} + \dots + M_m X_{ms} = L_1 Y_{1s} + L_2 Y_{2s} + \dots + L_l Y_{ls} \\ (s = 1, 2, \dots, k) \end{gathered}$$

das sogenannte „kleinste enthaltende“ Modulsystem $(K_1, K_2, \dots, K_k)$. Andererseits erhält man durch Zusammenstellung der einzelnen Moduln der beiden gegebenen Systeme das „größte gemeinsame“ Modulsystem [1])

$$(M_1, M_2, \dots, M_m, L_1, L_2, \dots, L_l) = (G_1, G_2, \dots, G_g).$$

Es läßt sich nun allgemein zeigen, daß zwischen den charakteristischen Funktionen χ_M und χ_L der beiden gegebenen Modulsysteme und den charakteristischen Funktionen χ_K und χ_G der beiden abgeleiteten Modulsysteme die einfache Relation

$$\chi_M + \chi_L = \chi_K + \chi_G$$

besteht, d. h.:

Die Summe der charakteristischen Funktionen zweier beliebiger Modulsysteme ist gleich der Summe der charakteristischen Funktionen für das kleinste enthaltende und das größte gemeinsame Modulsystem.

Um die Bedeutung dieses Satzes zu erläutern, wenden wir denselben auf die Lösung einer Aufgabe aus der Theorie der Raumcurven an. Es mögen zwei Raumcurven ohne Doppelpunkte von den Ordnungen μ_1, μ_2 und beziehungsweise von den Geschlechtern p_1, p_2 den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ von der Ordnung k_1, k_2 bilden. Die den beiden Raumcurven eigenen Modulsysteme seien $(M_1, M_2, \dots, M_m)$ und $(L_1, L_2, \dots, L_l)$. Das kleinste enthaltende Modulsystem ist offenbar (K_1, K_2) und das größte gemeinsame Modulsystem $(M_1, M_2, \dots, M_m, L_1, L_2, \dots, L_l)$ wird geometrisch durch diejenigen Punkte dargestellt, welche beiden Raumcurven gemeinsam sind. Die Zahl

1) Vergl. betreffs der Begriffsbestimmung: L. Kronecker, Crelle's Journal Bd. 92, pag. 78 sowie R. Dedekind und H. Weber, Crelle's Journal Bd. 92, pag. 197.

dieser Punkte sei g. Die in Betracht kommenden charakteristischen Funktionen sind

$$\chi_M = 1 - p_1 + \mu_1 \xi, \quad \chi_K = -\tfrac{1}{2} k_1^2 k_2 - \tfrac{1}{2} k_1 k_2^2 + 2 k_1 k_2 + k_1 k_2 \xi,$$
$$\chi_L = 1 - p_2 + \mu_2 \xi, \quad \chi_G = g,$$

und die Anwendung unseres Theorems ergiebt daher für die Zahl der den beiden Raumcurven gemeinsamen Punkte den Werth

$$g = \tfrac{1}{2} k_1^2 k_2 + \tfrac{1}{2} k_1 k_2^2 - 2 k_1 k_2 - p_1 - p_2 + 2.$$

In den citirten Untersuchungen über Modulsysteme werden noch eine Reihe weiterer für die Theorie der Modulsysteme fundamentaler Begriffe erörtert. Die dort gegebenen Definitionen sind nach geringfügigen Modifikationen auch für die hier betrachteten Systeme homogener Moduln gültig. So heißen bei unserer Auffassung zwei Modulsysteme „aequivalent", wenn von einer gewissen Ordnung in den Variablen an eine jede bezüglich des einen Modulsystems der Null congruente Form auch stets bezüglich des anderen Modulsystems der Null congruent ist. Zwei aequivalente Modulsysteme haben daher nothwendig dieselbe charakteristische Funktion, und im besonderen sind alle Modulsysteme mit der charakteristischen Funktion Null der Einheit aequivalent.

Zum Schlusse sei noch auf die von Cayley, G. Salmon, S. Roberts und A. Brill ausgebildete Theorie der sogenannten beschränkten Gleichungssysteme[1]) hingewiesen, da insbesondere für diesen Zweig der Algebra unser Begriff der charakteristischen Funktion eine wirksame Fragestellung sowie einen einheitlichen Gesichtspunkt liefert. Ist beispielsweise eine Raumcurve gegeben und betrachten wir irgend drei dieselbe enthaltende Flächen $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$ beziehungsweise von den Ordnungen r, s, t, so ist die Zahl der Schnittpunkte dieser Flächen, welche außerhalb jener Raumcurve liegen, offenbar gleich der charakteristischen Funktion des Modulsystems (f, g, h), vermindert um die charakteristische Funktion der Raumcurve. Diese Schlußweise führt in der That zu einem verallgemeinerungsfähigen Beweise für den bekannten Satz, wonach die Zahl der durch eine gemeinsame Raumcurve absorbirten Schnittpunkte jener drei Flächen gleich $\mu(r+s+t) - \rho$ ist, wenn μ die Ordnung der Raumcurve und ρ eine andere jener Raumcurve eigene Constante, den sogenannten Rang derselben, bedeutet.

1) Vergl. G. Salmon, Algebra der linearen Transformationen, Vorlesung 22 und 23, sowie den bezüglichen Litteraturnachweis.

Die weitere Aufgabe der im Vorstehenden entwickelten Theorie besteht nunmehr in der wirklichen Durchführung der den oben angedeuteten Anzahlbestimmungen zu Grunde liegenden algebraischen Processe.

Bemerkung zur Quaternionentheorie.

Von

O. Hölder.

Vorgelegt von H. A. Schwarz.

Für die Grundoperationen im Gebiete der reellen und der gewöhnlichen complexen, in der Form $x+yi$ enthaltenen Größen bestehen die Gesetze:

$$(1) \begin{cases} a+b = b+a \\ (a+b)+c = a+(b+c) \\ a.b = b.a \\ (ab).c = a(bc) \\ (a+b).c = ac+bc. \end{cases}$$

Die umgekehrten Operationen, Subtraction und Division können hier übergangen werden. Das angegebene System ist vollständig. Bedeuten nämlich $a_1, a_2, \dots a_n$ ganz willkürlich veränderliche Größen, und bildet man aus diesen unter Hinzunahme von einigen bestimmt gegebenen reellen Größen durch mehrfache Anwendung der Addition und Multiplication neue Größen, welche also Functionen von $a_1, a_2, \dots a_n$ sind, so ist die fundamentale Frage die: Unter welcher Bedingung stimmen zwei solcher Functionen, die verschieden gebildet sind, für alle Werthe der Größen a_1, $a_2, \dots a_n$ überein? Diese Frage ist gleichwerthig mit der folgenden: Wann ist eine solche Größe für alle Werthe von $a_1, a_2, \dots a_n$ gleich Null? Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn der fragliche Ausdruck vermöge der mit (1) bezeichneten Relationen identisch zu Null gemacht werden kann. Es ist wohl kaum hinzuzufügen, daß der Begriff „identisch" hier nicht in dem sonst in der Algebra üblichen Sinn, sondern nur seinem rein logischen Inhalt nach zu nehmen ist.

Der Beweis der aufgestellten Behauptung ergiebt sich daraus, daß jeder durch Addition und Multiplication gebildete Ausdruck mit Hilfe der Gleichungen (1) geordnet werden kann, und daß der geordnete Ausdruck nach dem Cartesischen Satz nicht für alle