Zur Theorie der algebraischen Gebilde.

(Erste Note.)

Von

David Hilbert aus Königsberg in Pr.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Die vorliegende Untersuchung nimmt die Theorie der algebraischen Gebilde von einem Gesichtspunkte aus in Angriff, welcher im wesentlichen durch die beiden folgenden Theoreme gekennzeichnet wird:

Theorem I. Ist

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$

eine unendliche Reihe von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so giebt es stets eine Zahl m von der Art, daß eine jede Form jener Reihe sich in die Gestalt

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_m\varphi_m$$

bringen läßt, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ geeignete Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind.

Die Ordnungen der einzelnen Formen der Reihe, sowie ihre Coëfficienten unterliegen keinerlei Beschränkungen. Denken wir uns die Coefficienten der vorgelegten Formen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ als Zahlen eines bestimmten Rationalitätsbereiches (resp. Integritätsbereiches), so gehören die Coëfficienten der Formen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dem nämlichen Bereiche an. Für das unäre, binäre und ternäre Formengebiet folgt die Richtigkeit unseres Satzes ohne Schwierigkeit und direkt.

Theorem II. Sind

$$\begin{array}{l} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \\ \psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \end{array}$$

r unendliche Reihen von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so giebt es stets eine Zahl m von der Art, daß für jeden Index k ein Gleichungssystem von der Gestalt

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_m\varphi_m, \\ \psi_k &= \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \cdots + \alpha_m\psi_m, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \rho_k &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \cdots + \alpha_m\rho_m \end{aligned}$$

erfüllt ist, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ geeignete Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind.

Das Theorem II geht für $r = 1$ in Thorem I über. Zunächst beweisen wir das Theorem II für Formen von n Veränderlichen unter der Voraussetzung, daß Theorem I für dieselbe Zahl von Veränderlichen bereits als richtig erkannt ist. Der Einfachheit halber betrachten wir nur zwei Formenreihen

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$
$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$$

Nach Theorem I läßt sich eine Zahl m_1 finden von der Art, daß für jeden Index k eine Gleichung von der Gestalt

$$\varphi_k = \alpha_{k1}\varphi_1 + \alpha_{k2}\varphi_2 + \cdots + \alpha_{km_1}\varphi_{m_1},$$

besteht. Bilden wir nun die Formen

$$\Psi_k = \psi_k - \alpha_{k1}\psi_1 - \alpha_{k2}\psi_2 - \cdots - \alpha_{km_1}\psi_{m_1},$$

so läßt sich wiederum für die Reihe:

$$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$$

eine Zahl m angeben, so daß für jeden Index k

$$\Psi_k = A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2 + \cdots A_m\Psi_m$$

gesetzt werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ geeignete Formen sind. Man erkennt leicht, daß diese Zahl m zugleich eine solche ist, welche im Sinne des Theorems II den beiden ursprünglichen Formenreihen zugehört.

Die Richtigkeit des Theorems II für die Variablenzahl n zieht die Gültigkeit des Theorems I für die Variablenzahl $n+1$ nach sich. Um diese Behauptung einzusehen, sei

$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

eine Reihe von Formen mit den $n+1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$; f_1 sei von der Ordnung r. Da eine lineare Transformation sämmtlicher Formen der Reihe freisteht, so darf vorausgesetzt werden, daß in der Form f_1 der Coëfficient von x_{n+1}^r einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Einem einfachen Gedankengange folgend, setzen wir

$$g_k = f_{k+1} + a_k f_1 = \varphi_k + \psi_k x_{n+1} + \cdots + \rho_k x_{n+1}^{r-1}$$

wo die Formen a_k sämmtliche $n+1$ Veränderliche, dagegen die Formen $\varphi_k, \psi_k, \ldots, \rho_k$ nur noch die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ enthalten dürfen. Wenden wir nun Theorem II auf die r unendlichen Formenreihen

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$$
$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$$

an, so folgt daraus unmittelbar die Richtigkeit des Theorems I für die Formenreihe

$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

und es bedarf nur noch des Ueberganges von dieser Formenreihe zu der ursprünglichen Formenreihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$

Die beiden Theoreme sind demnach ausnahmslos gültig, wie man auch die Formen der vorgelegten Reihen specialisiren mag. Man sieht zugleich, wie die wirkliche Berechnung der Zahl m ausführbar ist, sobald die zu untersuchenden Formenreihen durch ein gegebenes Gesetz festgelegt sind.

Das Theorem I führt zum Beweise eines Satzes, welcher für die Invariantentheorie in höheren Formengebieten von entsprechender Bedeutung ist, wie der bekannte Gordansche Fundamentalsatz für das binäre Formengebiet. Der Satz lautet:

Ist ein beliebiges System von Grundformen mit beliebig vielen Veränderlichen (und Reihen von Veränderlichen) vorgelegt, so giebt es für dasselbe stets eine *endliche* Zahl von ganzen und rationalen Invarianten (Combinanten, etc.), durch welche sich jede andere ganze und rationale Invariante in ganzer und rationaler Weise ausdrücken läßt.

Ordnen wir nämlich die Invarianten des Grundformensystems in eine unendliche Reihe

$$i_1, i_2, i_3, \ldots$$

indem wir successive die Invariannten ersten, zweiten, dritten, etc. Grades in den Coëfficienten der Grundformen construiren, so lehrt Theorem I, daß eine jede Invariante i sich durch eine endliche Zahl m derselben in der Gestalt

$$i = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_m i_m$$

ausdrücken läßt, wo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ganze homogene Funktionen der Coëfficienten der Grundformen bedeuten.

Nehmen wir nun der kürzeren Ausdrucksweise wegen an, daß es sich nur um *binäre* Formen mit *einer* Variablenreihe handele und denken uns dieselben durch die lineare Substitution:

$$x_1 = \alpha_1 x_1' + \beta_1 x_2',$$
$$x_2 = \alpha_2 x_1' + \beta_2 x_2'$$

mit der Determinante

$$\rho = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

transformirt, so geht die obige Gleichung über in

$$\rho^p i = \rho^{p_1} a_1' i_1 + \rho^{p_2} a_2' i_2 + \cdots + \rho^{p_m} a_m' i_m$$

wo $p, p_1, p_2, \ldots, p_m$ bezüglich die Gewichte der Invarianten $i, i_1, i_2, \ldots, i_m$ und $a_1', a_2', \ldots, a_m'$ die entsprechenden Funktionen der transformirten Coëfficienten sind. Wenden wir auf diese Identität p mal das Differentiationssymbol

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2} - \frac{\partial}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1}$$

an, so wird

$$i = I_1 i_1 + I_2 i_2 + \cdots + I_m i_m,$$

wo $I_1, I_2, \ldots, I_m$ Invarianten des Grundformensystems sind. Wir unterwerfen diese Invarianten derselben Behandlung, wie vorhin die Invariante i und erhalten dadurch schließlich eine ganze und rationale Darstellung der Invariante i mit Hülfe der m Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$.

Für das ternäre Formengebiet leistet das Differentiationssymbol

$$\Delta = \frac{\partial^3}{\partial \alpha_1 \partial \beta_2 \partial \gamma_3} - \frac{\partial^3}{\partial \alpha_1 \partial \beta_3 \partial \gamma_2} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha_2 \partial \beta_3 \partial \gamma_1} - \frac{\partial^3}{\partial \alpha_2 \partial \beta_1 \partial \gamma_3} + \\ + \frac{\partial^3}{\partial \alpha_3 \partial \beta_1 \partial \gamma_2} - \frac{\partial^3}{\partial \alpha_3 \partial \beta_2 \partial \gamma_1}$$

den entsprechenden Dienst [1]) etc.

Aus den Theoremen I und II ergeben sich ohne Schwierigkeit die folgenden Theoreme:

Theorem III. Sind $A, B, \ldots, H$ gegebene Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so existirt stets eine *endliche* Zahl m von Formensystemen mit denselben Veränderlichen

$$\begin{array}{l} X = X_1,\ X = X_2,\ \ldots,\ X = X_m \\ Y = Y_1,\ Y = Y_2,\ \ldots,\ Y = Y_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W = W_1,\ W = W_2,\ \ldots,\ W = W_m \end{array}$$

welche die Gleichung

$$AX + BY + \cdots + HW = 0$$

identisch befriedigen und zugleich die Eigenschaft besitzen, daß jedes andere jener Gleichung genügende Formensystem in die Gestalt

$$\begin{array}{l} X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_m X_m, \\ Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \cdots + \alpha_m Y_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \cdots + \alpha_m W_m \end{array}$$

1) Vergl. P. Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie Bd. II § 9 und F. Mertens: Ueber invariante Gebilde ternärer Formen. Sitzb. der kais. Akad. der Wiss. zu Wien. Bd. XCV.

gebracht werden kann, wo man unter $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ebenfalls Formen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu verstehen hat [1]).

Die m Formensysteme bilden die vollständige Lösung der betrachteten Gleichung. Auch wenn *mehrere* Gleichungen von der in Rede stehenden Art gleichzeitig zu befriedigen sind, existirt stets ein volles Lösungssystem in dem entsprechenden Sinne.

Thorem IV. Sind $A, B, \ldots, H$ ganze rationale Funktionen der $p+q$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1, u_2, \ldots, u_q$, so existirt eine *endliche* Anzahl m von Formen $U_1, U_2, \ldots, U_m$ der q Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_q$, welche sämmtlich Ausdrücken von der Gestalt

$$AX + BY + \cdots + HW$$

gleich sind und überdies die Eigenschaft besitzen, daß jede andere Form von derselben Eigenschaft durch die Formel

$$U = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_m U_m$$

gegeben wird. Dabei sind $X, Y, \ldots, W$ ganze rationale Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_p, u_1, u_2, \ldots, u_q$ und $a_1, a_2, \ldots, a_m$ Formen der q Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_q$.

Das Theorem IV führt zu einem allgemeinen Satze über algebraische Gebilde, welcher beispielsweise für das quaternäre Formengebiet folgende geometrische Deutung erhält:

Durch eine gegebene Raumcurve läßt sich eine *endliche* Zahl m von Flächen

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_m = 0$$

hindurchlegen derart, daß jede andere die Curve enthaltende Fläche sich durch die Gleichung

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_m\varphi_m = 0$$

darstellen läßt, wo unter $a_1, a_2, \ldots, a_m$, quaternäre Formen zu verstehen sind [2]).

Wir wenden uns wiederum zur algebraischen Invariantentheorie und verstehen nach bekannter Ausdrucksweise unter einer irreduciblen Syzygie eine solche Relation zwischen den Invarianten des Grundformensystems, deren linke Seite nicht durch lineare Combination Syzygien niederer Ordnungen erhalten wird. Es gilt dann der Satz:

---

1) Dieser Satz ist von L. Kronecker in seinem Beweise für die Endlichkeit des Systems der ganzen algebraischen Größen einer Gattung bereits implicite zur Geltung gebracht; vergl. Crelle's Journal Bd. 92, pag. 16.

2) Vgl. betreffs der Fragestellung: G. Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, II, 79.

Ein endliches System von Invarianten besitzt nur eine *endliche* Zahl von irreducibeln Syzygien.

Als Beispiel diene das volle Invariantensystem von drei binären quadratischen Formen, welches bekanntlich aus 7 Invarianten und 6 Covarianten besteht. Für dieses System giebt es genau 14 irreducible Syzygien.

Zwischen den Syzygien ihrerseits bestehen lineare Relationen, welche wiederum selber unter sich linear abhängig sein können etc. Was die Fortsetzung des hiedurch eingeleiteten Verfahrens anbetrifft, so genüge an dieser Stelle der Hinweis auf das unten behandelte Beispiel der Normcurve vierter Ordnung. Offenbar fallen die so entspringenden Fragen in den Wirkungskreis des Theorems III.

Was die Theorie der Ausartungen algebraischer Formen anbetrifft, so sprechen wir folgenden speziellen Satz aus:

Es giebt eine *endliche* Anzahl von ganzen Funktionen der Coëfficienten einer algebraischen Gleichung, welche verschwinden, sobald die Gleichung eine gewisse Zahl vielfacher Wurzeln erhält und aus welchen sich eine jede andere ganze Funktion von derselben Eigenschaft in linearer Weise zusammensetzen läßt.

Sollen beispielsweise alle homogenen Funktionen der 5 Coëfficienten einer binären biquadratischen Form angegeben werden, welche verschwinden, sobald dieselbe ein volles Quadrat wird, so bedarf es dazu der 7 Coëfficienten $c_0, c_1, \ldots, c_6$, der Covariante 6ter Ordnung. Es läßt sich nämlich zeigen, daß jede Funktion von der verlangten Eigenschaft in die Gestalt

$$a_0 c_0 + a_1 c_1 + \cdots + a_6 c_6$$

gebracht werden kann, wo $a_0, a_1, \ldots, a_6$ homogene Funktionen der 5 Coëfficienten der Grunform sind.

Um im Sinne der oben dargelegten Principien ein sehr einfaches Beispiel wirklich durchzuführen, betrachten wir die Normcurve im vierdimensionalen Raume. Um dieselbe zu definiren, setzen wir die 5 homogenen Punktcoordinaten eines solchen Raumes gleich biquadratischen Formen an, etwa:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1^4, \\ u_2 &= x_1^3 x_2, \\ u_3 &= x_1^2 x_2^2, \\ u_4 &= x_1 x_2^3, \\ u_5 &= x_2^4. \end{aligned}$$

Die Diskussion dieses Gebildes ergiebt folgende Thatsachen:

Alle quinären Formen der Veränderlichen u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, welche nach Einführung der obigen Ausdrücke identisch für alle Werte von x_1, x_2 verschwinden, sind enthalten in dem Ausdruck

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_6\varphi_6,$$

wo

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= u_1 u_3 - u_2^2,\\
\varphi_2 &= u_1 u_4 - u_2 u_3,\\
\varphi_3 &= u_1 u_5 - u_2 u_4,\\
\varphi_4 &= u_1 u_5 - u_3^2,\\
\varphi_5 &= u_2 u_5 - u_3 u_4,\\
\varphi_6 &= u_3 u_5 - u_4^2,
\end{aligned}$$

zu setzen ist und α_1, α_2, ..., α_6 beliebige quinäre Formen sind. Zwischen den 6 angegebenen Formen bestehen folgende 8 Identitäten

$$\begin{aligned}
\psi_1 &\equiv u_3\varphi_1 - u_2\varphi_2 - u_1\varphi_3 + u_1\varphi_4 &&= 0,\\
\psi_2 &\equiv u_4\varphi_1 - u_3\varphi_2 - u_2\varphi_3 + u_2\varphi_4 &&= 0,\\
\psi_3 &\equiv u_5\varphi_1 - u_3\varphi_3 + u_2\varphi_5 &&= 0,\\
\psi_4 &\equiv u_3\varphi_2 - u_2\varphi_4 + u_1\varphi_5 &&= 0,\\
\psi_5 &\equiv u_4\varphi_2 - u_3\varphi_3 + u_1\varphi_6 &&= 0,\\
\psi_6 &\equiv u_5\varphi_2 - u_4\varphi_3 + u_2\varphi_6 &&= 0,\\
\psi_7 &\equiv u_4\varphi_3 - u_4\varphi_4 + u_3\varphi_5 - u_2\varphi_6 &&= 0,\\
\psi_8 &\equiv u_5\varphi_3 - u_5\varphi_4 + u_4\varphi_5 - u_3\varphi_6 &&= 0.
\end{aligned}$$

Alle anderen Identitäten zwischen den Formen φ_1, φ_2, ..., φ_6 haben die Gestalt

$$\beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \cdots + \beta_8\psi_8 = 0,$$

wo β_1, β_2, ..., β_8 irgendwelche quinäre Formen sind. Die 8 angegebenen Identitäten sind wiederum durch folgende 3 Relationen verbunden

$$\begin{aligned}
&u_4\psi_1 - u_3\psi_2 - u_3\psi_4 + u_2\psi_5 + u_1\psi_7 &&= 0,\\
&u_5\psi_1 - u_3\psi_3 - u_4\psi_4 + u_3\psi_5 + u_2\psi_6 + u_2\psi_7 + u_1\psi_8 &&= 0,\\
&u_5\psi_2 - u_4\psi_3 + u_3\psi_6 + u_2\psi_8 &&= 0.
\end{aligned}$$

Dieselben sind identisch erfüllt, wenn man für ψ_1, ψ_2, ..., ψ_8 die obigen Ausdrücke einsetzt. Jede andere Relation zwischen den Ausdrücken ψ_1, ψ_2, ..., ψ_8 läßt sich aus den 3 angegebenen in linearer Weise zusammensetzen und zwischen den linken Seiten der letzteren findet keine weitere Identität mehr statt.

Berechnet man aus diesen Thatsachen die Zahl der Flächen $n$ter Ordnung, welche jene Normcurve enthalten, so ergiebt sich der Wert

$$6.\ \frac{n-1\cdot n\cdot n+1\cdot n+2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-8.\ \frac{n-2\cdot n-1\cdot n\cdot n+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$$

$$+3.\ \frac{n-3\cdot n-2\cdot n-1\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-(4n+1);$$

d. h. es sind $4n+1$ Bedingungen erforderlich, damit eine Fläche $n$ter Ordnung des vierdimensionalen Raumes die Normcurve enthält. Dieses Ergebniß entspricht in der That der bekannten Geschlechtszahl Null unserer Curve.

Zur Weiterentwickelung der angeregten Fragen bedarf es der Verallgemeinerung des Noetherschen Fundamentalsatzes [1]) für Räume von beliebiger Dimension sowie einer eingehenden Untersuchung aller hierbei in Betracht kommenden Ausnahmefälle. An gegenwärtiger Stelle soll jedoch der Weg nicht näher bezeichnewerden, welcher dem Verfasser zur Erreichung jenes Zieles geeigi net erscheint.

Aus dem Noetherschen Theoreme lassen sich Folgerungen ziehen, welche vollkommen im Rahmen der oben entwickelten Gedankenreihe bleiben und insbesondere zu den eingangs erörterten Theoremen in naher Beziehung stehen. Das einfachste Beispiel dieser Art ist der Satz:

Bedeuten φ, ψ, χ drei ternäre Formen der $n$ten Ordnung mit nicht verschwindender Resultante, so ist jede ternäre Form f von der Ordnung $m \geqq 3n-2$ in der Gestalt:

$$f=\alpha\varphi+\beta\psi+\gamma\chi$$

darstellbar, wo α, β, γ ebenfalls ternäre Formen sind.

Ostseebad Rauschen, den 6. September 1888.

1) Vergl. M. Noether, Mathematische Annalen Bd. VI und XXX, sowie A. Voss, Mathematische Annalen Bd. XXVII und L. Stickelberger, Mathematische Annalen Bd. XXX.