SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Colleg : Invariantentheorie. Dreistündig nebst einer Uebungsstunde Wintersemester...

Untertitel: Invariantentheorie und Übungen. 3st. 1886/87 und 1st. 1893 [Einbandtitel] ; [Verm...

Autor: Hilbert, David

Ort: Königsberg

Jahr: 1886

Kollektion: nachlaesse

Gattung: Vorlesung; Vorlesungsmanuskript

Signatur: Cod. Ms. D. Hilbert 521

Werk Id: DE-611-HS-3155451

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=DE-611-HS-3155451|DE-611-HS-3155451

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Cod. Ms. D. Hilbert 521

Invariantentheorie
und
Uebungen

3 st. 1886/87 und 1 st. 1893

Auch als Mikroform vorhanden unter
Sign.: MF / Cod. Ms. Hilbert 521

S. 1 - 277, 281, 281 - 379 m 27.1.78

Niedersächsische Staats-
u. Univ[illegible]thek
Gött[illegible]

I

Dr. Hilbert

1.

Colleg: Invariantentheorie

Dreistündig nebst einer Uebungsstunde Wintersemester 1886/87.

In Heft IV Anfang eines einstündigen Collegs über „Invariantentheorie“ welches ich Winter 1892/93 lesen wollte.

Ahlemerstr. 10.

Langsame, schrittweise Entwicklung
Kleine, deutliche Schrift.
ansehen die Zuhörer, ob sie
nicht verstehen.

Bericht für die ersorgende Funktion für die Perpetuanten von
Stroh F. d. M. 1890 S. 142 und von Mac-Mahon F. d. M. 1895 S. 141

Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten

M.H. Die alged. Invariantenth. ist eine verhältnissmässig moderne math. Disziplin zu nennen. Will man nämlich den Ursprung der I. auf Lagrange oder auf Gauss zurückführen, so erscheint mir dies aus mehreren Gründen bedenklich und gezwungen und wir bezeichnen vielmehr den englischen M. Cayley ~~und dt~~ als den Begründer und somit das Jahr 1845 als das Geburtsjahr der Invariantentheorie. Cayley war der erste, welcher gewisse einfache Invarianten unter dem Namen Hyperdeterminanten bestimmte und in einer in jenem Jahre erschienen Schrift lediglich ihrer Invarianten-Eigenschaft halber in die Rechnung einführte. Noch möchte ich hier eine genauere Darlegung des Entwickelungsganges vermeiden und vielleicht für später vorbehalten. Hauptsächlich, weil ich glaube, dass es nicht

interessant sei, von der Geschichte einer Disziplin etwas zu hören, für die selbst man noch gar kein Interesse gewonnen hat. F
Es sei mir noch eine praktische Bemerkung erlaubt. Die Invariantentheorie befindet sich in der glücklichen Lage, zu ihrem Verständnisse wissenschaftliche Vorkenntnisse nur in sehr geringem Maasse nöthig zu haben, nämlich etwa die Kenntniss der wichtigsten Begriffe aus der Differentialrechnung oder eigentlich auch nur die technischen Fertigkeiten und Regeln der Differentiirens und zweitens etwas Determinantentheorie, die sich leicht aneignen lässt. Von Lehrbüchern erwähnte ich nur das eine vornehmste und vollständigste:

Baltzer „Theorie und Anwendung der Determinanten"

Eine Menge anderer Lehrbücher in jedem Catalog einer math. Bibliothek. Ferner nicht

unbemerkt lassen:

Hesse, Analytische Geometrie der Raumes Vorl VII
Salmon, Algebra der linear. Transf. Vorl I
Serret, Höhere Algebra Th. I Kap. IV
Weber Algebra Bd I Abschnitt 4 § 2.

F Aus demselben Grunde verzichte ich hier auch auf eine vollständige Litteratur und gebe nur an die 4 grösseren Lehrbücher:

Clebsch Theorie d. binären algeb. Formen 1872 Teubner
Salmon, Algebra der linear. Transf. 1885 (Deutsch Teubner)
Faà di Bruno, Theorie d. binären Formen 1881 (Teubner)
Gordan Vorles. über Invariantentheorie. 1885 Teubn.

Das letzte ist erst ein Begriff zu erstreben. Reine Formen Abzug Rein M. über Invariantentheorie für die Math. Vereinigung. 1892.
Im Uebrigen sind sie inhaltlich und prinzipiell so von einander verschieden, wie es nur Lehrbücher derselben Disziplin sein können. Auf eine Charakteristik und Kritik derselben können wir hier jedoch noch nicht eingehen.

Wir kommen nun endlich zur Entwickelung der Fundamente unserer Disciplin. Wenn wir so einrichten, dass wir die einzelnen Abschnitte der Vorlesung mit Paragraphenüberschriften versehen, so möchte ~~ich~~ der erste [illegible] §, ~~die alg~~ heissen

§ 1 Die ~~algebraische~~ Form

Eine ganz-ratio. Funkt. der Variabeln $x, y, z \ldots$ ist eine Summe von Prod. und Potenzen:
Der Anschaulichkeit halber nur 3 Variabele.

$$G = R = F(x, y, z) = A + Bx + Cy + Dz$$

$$+ Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + Hxy + Jxz + Kyz$$

$$+ Lx^3 + My^3 + Nz^3 + \ldots$$

$$= \sum^{ikl} C_{ikl}\, x^i y^k z^l$$

Wie die Summe zu verstehen ist, ~~Noch~~ klarer ma-

chen durch Vergleichung

i	0	1	0	0	2	0	...
k	0	0	1	0	0	1	..
l	0	0	0	1	0	0	..

$c_{000} = A \quad | \quad c_{200} = E$

$c_{100} = B \quad | \quad c_{020} = F$

$c_{010} = C \quad | \quad c_{002} = G$

$c_{001} = D \quad | \quad c_{110} = H$

Also nur eine aequivalenter Ausdruck, andere kürzere Schreibart.

In dem Glieder G. R. F eine gewisse Zahl eigenthümlich, welche die Ordnung heisst. d. h. die Summe $i+k+l$

$$Ordg = i + k + l$$

Beispielsweise hat $A \not\equiv B$, i. die Ordnung $0, 1, 1, \ldots$

Die höchste Ordg, welche noch vorkommt, heisst die Ord. d. F.

Brechen wir beispielsweise hier ab....

Wir werden nun unsern Hauptaugenmerk auf eine besondere Klasse v. G. R. F richten nämlich auf solche, welche nur Glieder von gleicher Ordnung enthalten. Solche heissen homogen. Def. der

(n ter Ord)

Form: ~~Al~~ Eine ~~algeb~~. Form (n ten Ord) ist eine G. R. H Funkt

Ihr Allgemeiner Ausdruck ist.

$$F_{(x,y,z)} = \sum^{i,k,l} C_{ikl}\, x^i y^k z^l \qquad i+k+l=n$$

Beispielweise

$$F_1 = Bx + Cy + Dz$$

$$F_2 = Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + Hxy + Ixz + Kyz$$

. — — — — — — — —

Im folgenden werden wir nur „Formen" betrachten Doch greift dadurch keine Einschränkung der Allgemeinheit Platz. Denn

$$GRF = [0] + [1] + [2] + \dots [n]$$

$$F = [0]u^n + [1]u^{n-1} + [2]u^{n-2} + \dots [n]$$

Wir können also jede nicht homogene ~~Funkt~~ Funkt. in eine Form umwandeln, wenn wir die Zahl der Variabeln um 1 vermehrten. Umgekehrt kehren wir für $u = 1$ zu der Funktion zurück.

d. h. Die Theorie der ~~abgeb.~~ ganz. rat. F. n ter Ordnung von m Variabel ist mit der Theorie der Formen n ter Ord. von m + 1 Variabeln äquivalent.

Allgemeiner Satz über ~~homogene Funktionen~~ (Formen) Führen wir in einer ~~abgeb.~~ Form $F(x, y, z \ldots)$ ~~statt~~ der Variabeln $x, y, z \ldots$ von der n ten Ordnung neue Variabele ein mittelst der Substitution:

$$x = tx', \quad y = ty', \quad z = tz' \ldots$$

so besteht die Identität:

$$F(x, y, z \ldots) = t^n F(x', y', z', \ldots)$$

Sie ändert sich also nur um eine Potenz von t. Beweis

$$F(x, y, z \ldots) = \sum^{i,k,l} C_{i,k,l}\, x^i y^k z^l = \sum^{i,k,l} C_{i,k,l}\, t^i x'^i t^k y'^k t^l z'^l$$

$$= t^{\sum} \sum C_{i,k,l}\, t^{i+k+l}\, x'^i y'^k z'^l = t^n \sum C_{i,k,l}\, x'^i y'^k$$

Umkehrung: Der Hauptsatz für
Satz: eine G.R.F. bei jener Substitution die Beziehung

$$GRF(x,y,z..) = t^n GRF(x',y',z'...)$$

so ist F wie eine Form von der n^{ten} Ordnung

Beweis indirekt. Denn hätte die GRF noch Glieder von der m_p^{ten} Ordnung, so

$$GRF_{(x,y,z)} = [n] + [m] + [p] + \dots$$

$$t^n GRF(x'y'z') = t^{n} [n]' + t^m [m^*]' + t^p [p^*]' + \dots$$

Wir werden nun unseren Hauptsatz anwenden, um damit einen fundamentalen, allgemeinen Satz über Formen zu beweisen. Der Satz hier doch: Wenn wir in eine Form die Substitution ..... einführen, so ergiebt sich die Identität: ..... Wie aus der Differentialgl. bekannt ist, können wir eine solche Identität differenziren und erhalten:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \dots = n\, t^{n-1} F(x'y'z'\dots)$$

$\frac{dx}{dt} = x'$ $\frac{dy}{dt} = y'$ $\frac{dz}{dt} = z'$

$$x' \frac{\partial F}{\partial x'} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + z' \frac{\partial F}{\partial z} + \dots = n t^{n-1} F(x' y' z' \dots)$$

$$t = 1 \quad x = x' \quad y = y' \quad z = z'$$

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} + \dots = n F(x, y, z \dots)$$

In dieser Formel spricht sich der Satz aus:
Zwischen den ersten Differentialquotienten einer Form und der Form selbst besteht eine lineare Beziehung jener einfachen Art.

Um alles bisherige zu veranschaulichen, wollen wir einige Beispiele von Formen aufstellen. Wir hatten die Formen unterschieden nach ihren Ordnungen. Wir können sie auch nach ihrer Variabelen zahl unterscheiden. So nennen wir eine Form

$F(x, y)$: binär
$F(x, y, z)$: ternär
$F(x, y, z, u)$: quaternär.
quinär
senär

1.) Binäre Form $n=1$ $Ax + By$

$n=2$ $Ax^2 + Bxy + Cy^2$

$n=3$ $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$

2.) Ternäre Form $n=1$ $Ax + By + Cz$

$n=2$ $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Exy + Fxz + Gyz$

3.) quaternäre Form $n=1$ $Ax + By + Cz + Du$

$n=2$ $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Du^2 + Exy + Fxz + Gxu + Hyz + Iyu + Kzu$

Wir greifen einige Beispiele heraus um unseren obigen Satz zu ~~ver~~bestätigen.

1) $n=3$ $f = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$

$x \left| \frac{\partial f}{\partial x} = \right.$

$y \left| \frac{\partial f}{\partial y} = \right.$

$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 3Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + 3Dy^3 = 3f$

2) $n=2$

Die Zahl der ~~Coefficienten~~ Glieder wird, wie man sieht, mit x immer grösser sowohl mit wachsender Variabelenzahl wie mit wachsender Ordnung. Wir wollen versuchen, die Zahl der Glieder einer allgemeinen Form n ter Ordnung von m Variabeln zu bestimmen.

$$F^{(n)}(x_1, x_2 \ldots x_m) = \sum C\, x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_m^{\nu_m} \qquad \nu_1 + \nu_2 + \ldots \nu_m = n$$

$$= \sum C\, x_{\mu_1} x_{\mu_2} x_{\mu_3} \ldots x_{\mu_n}$$

$$= x_m^n F_0(x_1, x_2 \ldots x_{m-1}) + x_m^{n-1} F_1(x_1, x_2 \ldots x_{m-1}) + \ldots F_n(x_1, x_2 \ldots x_{m-1})$$

Wir bezeichnen die gesuchte Zahl mit $\varphi(n, m)$ und da die Gliederzahl auf beiden Seiten dieselben sein müssen, so haben wir

$$= \sum_{\sigma=0,1 \ldots n} \varphi(\sigma, m-1)$$

$$\varphi(n, m) = \varphi(0, m-1) + \varphi(1, m-1) + \ldots \varphi(n, m-1)$$

Eine Form ~~nter Ord und einer Variab~~ kann ~~eine Constante sein~~ also nur ein Glied enthalten also:

$$\varphi(n, 1) = 1$$

$\varphi(n, m) - \varphi(n, m-1) = \varphi(n-1, m)$

Nehmen wir dann, dass

Für $m = 2$ ist die unsrerige Formel richtig und da die allgemeine, da aus $\varphi(n, m) - \varphi(n, m-1) = 0$ $\varphi(n, m)$ von m abhängig sein würde.

Daraus ist die successive Berechnung der gesuchten Zahlen möglich, wie folgt:

$$\varphi(n,2) = \sum_{r=0,1..n} \varphi(r,1) = \sum_{r=0,1,..n} 1 = n+1$$

$$\varphi(n,3) = \sum_{r=0,1..n} \varphi(r,2) = \sum_{r=0,1..n} r+1 = 1+2\ldots n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Wir ~~ersehen~~ mutmaassen daraus das Gesetz:

$$\varphi(n,m) = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\cdot 2\ldots m-1}$$

{ n = Ordnung
m = Zahl d. hom. Variabl.

und in der That gilt nun auch die obige Recursionsformel, wie wir erkennen, ~~wenn wir sie~~ ~~Revue~~, wenn wir $\varphi(r, m-1)$ bilden, in diese Summe einsetzen und nach den Regeln der Summation höherer Arithmetischer Reihen ausführen. Damit ist dann unsere Zahl $\varphi(n,m)$ als correct bewiesen und wir haben in der That zur Bestätigung

		$n=1$	$=2$	$=3$
1.) binäre Formen	$m=2$: $\varphi =$	2,	3,	4
2.) ternäre Formen	$m=3$ $\varphi =$	3,	6,	
3.) quaternäre Form	$m=4$ $\varphi =$	4,	10,	

Bevor wir diese allgemeineren Betrachtungen verlassen, wollen wir uns einmal vergegenwärtigen, was die Theorie der Formen im Grunde eigentlich leisten würde. Wir haben zunächst die binäre Form $F(x;y)$, $y = 1$. Wir erhalten dann eine G. R. F. nur einer Variabeln x und können diejenigen Variabelnwerte ins Auge fassen, für welche jene GRF verschwindet d. h. Theorie der (algebr.) Gleichung mit einer Unbekannten. Andererseits können wir jene Variabele auf einer Geraden denken. d. h. Geometrie der Geraden. Ferner ternäre Form: $y = 1$. Wir erhalten 2 Variabele und betrachten wir wiederum die Wertsysteme $F(x;y,1) = 0$ so erhalten wir damit Beziehung zur Theorie der Gl. mit 2 Unbekannten. Andererseits geometrische Deutung in der Ebene d. h. Geometrie der Ebene oder speziell Theorie der algebraischen Curven. Ebenso finden wir dass die Theorie der quaternären Formen mit der Theorie der algeb. Flächen im Raume von 3.

Dimensionen aequivalent ist. Also die Theorie der alge. Gl. und die Geometrie der alg. Gebilde gehen gemeinschaftlich auf in der Theorie der Formen. Wir haben damit allerdings nur einen allgemeinen Gedanken angedeutet und erst der Erfolg muss ~~wird es~~ lehren, ob in der That die Mittel, über welche die Formen Theorie verfügt, geeignet sind, auf jene anderen math. Disziplinen einen befruchtenden Einfluss zu gewinnen.

Wir können nun dazu ~~das~~ wir die ersten Mittel der Formentheorie kennen zu lernen nämlich den Begriff der lin. Transformation. Einschränkung der Ueberschrift:

§ 2 Die lineare Transformation

Form $F^{(m)}(x_1, x_2 .. x_m)$ Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1', x_2', \dots x_m') \\ x_2 &= \varphi_2(\quad) \\ &\dots \\ x_n &= \varphi_m(\quad) \end{aligned}\right\}$$

so haben wir eine Transformation ausgeführt und die erlangte Form $F^{(n)}(x_1' x_2' \dots x_m')$ heißt die transformierte Form. Unter allen solchen algebraischen Transformationen ist die lineare besonders ausgezeichnet. Wir erkennen hier sofort die ihre Eigenschaft der Ordnung der Form nicht zu ändern. Denn:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' + \dots \alpha_{1m} x_m' \\ x_2 &= \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \dots \alpha_{2m} x_m' \\ &\dots \quad - \quad - \quad - \quad - \\ x_m &= \alpha_{m1} x_1' + \alpha_{m2} x_2' + \dots \alpha_{mm} x_m' \end{aligned}$$

behält jedes Glied seine Ordnung bei d. h. keine höhere Ordnung. Um den Vorgang zu veranschaulichen wollen wir die l. Transformation an zwei Beispielen wirklich durchführen:

1) $n = 2,\ m = 2$:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

$$F^{(2)}(x, y) = A x^2 + B xy + C y^2 = A(\alpha x' + \beta y')^2 + B(\alpha x' + \beta y')(\gamma x' + \delta y') + C(\gamma x' + \delta y')^2$$

$$F'^{(2)}(x', y') = A' x'^2 + B' x' y' + C' y'^2$$

$A' =$

1) $n = 2,\ m = 2$

$$x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2'$$
$$x_2 = \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2'$$

$$F^{(2)}(x_1, x_2) = A x_1^2 + B x_1 x_2 + C x_2^2 = A(\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2')^2$$
$$+ B(\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2')(\alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2') + C(\alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2')^2$$

$$F'^{(2)}(x', y') = A' x_1'^2 + B' x_1' x_2' + C' x_2'^2$$

$$A' = A\alpha_{11}^2 + B\alpha_{11}\alpha_{21} + C\alpha_{21}^2$$

$$B' = 2A\alpha_{11}\alpha_{12} + B(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) + 2C\alpha_{21}\alpha_{22}$$

$$C' = A\alpha_{12}^2 + B\alpha_{12}\alpha_{22} + C\alpha_{22}^2$$

2) $n = 3,\ m = 3$

$$x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' + \alpha_{13} x_3'$$
$$x_2 = \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \alpha_{23} x_3'$$
$$x_3 = \alpha_{31} x_1' + \alpha_{32} x_2' + \alpha_{33} x_3'$$

$$F^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = A x_1 + B x_2 + C x_3$$

$$= A(\quad) + B(\quad) + C(\quad)$$

$$F^{(1)}(x_1', x_2', x_3') = A' x_1' + B' x_2' + C' x_3'$$

$$A' = A\alpha_{11} + B\alpha_{12} + C\alpha_{13}$$

$$B' = A\alpha_{21} + B\alpha_{22} + C\alpha_{23}$$

$$C' = A\alpha_{31} + B\alpha_{32} + C\alpha_{33}$$

Wir kehren nun zur allgemeinen Transformation zurück und wollen dieselbe zunächst für sich untersuchen.

Wir werden eine weitere ausgezeichnete Eigenschaft der lin. Tr. kennen lernen wenn wir versuchen die Tr. umzukehren d. h. die x' durch die x auszudrücken. Betrachten wir daher die x' als Unbekannte, so haben wir n Gl. mit n Unbekannten und nach der Determinantentheorie:

$$A\,x_1' = A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3 + \dots A_{m1}x_m$$
$$A\,x_2' = A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + \dots A_{m2}x_m$$
$$A\,x_m' = A_{1m}x_1 + A_{2m}x_2 + \dots A_{mm}x_m$$

d.h. auch die reziproque Transf. ist linear. Auch diejenige Transformation, welche F' in F zurückführt ist linear. Noch eine dritte allg. Eigenschaft. Nämlich

$$x_1' = \beta_{11}x_1'' + \beta_{12}x_2'' + \dots \beta_{1m}x_m''$$
$$x_2' = \beta_{21}x_1'' + \beta_{22}x_2'' + \dots \beta_{2m}x_m''$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m' = \beta_{m1}x_1'' + \dots \beta_{mm}x_m''$$

$$x_1' = \alpha_{11}(\beta_{11}x_1'' + \beta_{12}x_2'' + \dots x_m'') + \alpha_{12}(\beta_{21}x_1'' + \dots \beta_{2m}x_m'') + \dots$$

Diese Eigenschaft bezeichnen wir also die Gruppeneigenschaft der linearen Tr. Der Gruppenbegriff hat auch hier die Hand im Spiele.

besitzt n^2 Zahlkoeffizienten α.
Eine systematische Untersuchung der lin. Transf. wird es erfordern, die jene allg. Fr. auf spezielle Typen mit weniger Koeffizienten zurückzuführen. Wir werden diese Aufgabe für den einfachsten Fall $n = 2$ lösen:

$$x_1' = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2'$$
$$x_2' = \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2'$$

$J_4 = \begin{matrix} x_1 = x_2' \\ x_2 = x_1' \end{matrix}$

$J_3 J_2 J_1$

1.) $\alpha_{11} = \kappa \quad \alpha_{22} = \lambda$
$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$
$\Big|$ $x_1' = \kappa x_1'$
$x_2' = \lambda x_2'$ $\quad J_1$

2.) $\alpha_{11} = 1 \quad \alpha_{12} = \mu$
$\alpha_{21} = 0 \quad \alpha_{22} = 1$
$\Big|$ $x_1' = x_1' + \mu x_2'$
$x_2' = x_2'$ $\quad J_2$

3.) $\alpha_{11} = 1 \quad \alpha_{12} = 0$
$\alpha_{21} = \nu \quad \alpha_{22} = \varkappa$
$\Big|$ $x_1' = x_1'$
$x_2' = \nu x_1' + \varkappa x_2'$ $\quad J_3$

$x_1' = \kappa x_1' \;:\; \kappa x_1 = \kappa(x_1' + \mu x_2') : \kappa(x_1 + \mu x_2) = \kappa(x_1' + \mu(\nu x_1' + \varkappa x_2'))$
$x_2' = \lambda x_2' \;:\; \lambda x_2 = \lambda x_2' : \lambda x_2 = \lambda(\nu x_1' + \varkappa x_2')$

3.) x_2, x_1 — 2.) x_2, $x_1 + \mu x_2$ — 3.) x_1, $\nu x_1 + x_2$

$$x_1 = (\kappa + \kappa\nu\mu)\, x_1' + \kappa\mu\, x_2' = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2'$$

$$x_2 = \lambda\nu\, x_1' + \lambda\, x_2' = \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2'$$

$$\kappa = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}} \qquad \lambda = \alpha_{22}$$

$$\mu = \frac{\alpha_{12}\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} \qquad \nu = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}$$

Dies giebt immer bestimmte Werte für $\kappa, \lambda, \mu, \nu$, wenn $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ und wenn $\alpha_{22} \neq 0$. Δ nehmen wir immer $\neq 0$. [illegible]

Es wird nun offenbar auch die lineare Transf. von 3 Variabeln eine ähnliche Reduktion auf einfache Typen gestatten, aber wir begnügen uns hiemit einerseits weil der leitende Gedanke schon klar ist, andereseits weil wir im Folgenden [illegible] zunächst von der Transf. des binären Variabelngebietes handeln werden und dabei von jener Zerlegung in Grundtypen den ausgiebigsten Gebrauch machen werden. (d.h. $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & +\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & -\mu\alpha_{11}+\alpha_{21}\\ \alpha_{21} & -\mu\alpha_{21}\end{pmatrix}$)

Ist aber $\alpha_{22} = 0$, so bilde man [illegible] $\begin{pmatrix}1 & -\mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & -\mu\alpha_{11}+\alpha_{21}\\ \alpha_{21} & -\mu\alpha_{21}\end{pmatrix}$ und hier ist das 4te Element $\neq 0$, sobald wir die Determinante $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$ nehmen.

Jede wissenschaftliche Forschung geht darauf aus Aequivalenten festzustellen und deren Invarianten zu ermitteln und für jede gilt das Dictum: Das Bleibende sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht.

§ 3 Begriff der Invariante

Wir beschränken uns nun im Folgenden eine längere Zeit hindurch mit dem binären Formengebiete, legen also eine binäre Form zu Grunde:

$$f^{(n)}(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots a_n x_2^n$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n \cdot n-1 \dots n-i+1}{1 \cdot 2 \dots i}$$

Die Nützlichkeit wird der Erfolg rechtfertigen während die Erlaubniss vorhanden ist. Wir transformiren nun mittelst jener allgemeinen linearen Transformation und erhalten

$$f'^{(n)}(x_1' x_2') = a_0' x_1'^n + \binom{n}{1} a_1' x_1'^{n-1} x_2' + \binom{n}{2} a_2' x_1'^{n-2} x_2'^2 + \dots a_n' x_2'^n$$

Wie wir schon früher an dem Beispiel der quadratischen Form ausgeführt haben ~~hänge die a'~~ enthalten die a' die a und die α

$$\delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um zur Definition der Invarianten und Covarianten zu kommen.

Eine Invariante der Grundform f ist eine solche ganze rationale Funktion der Coefficienten $a_0 a_1 \ldots a_n$, die sich nur um eine als Faktor hinzutretende Potenz der Substitutionsdeterminante δ ändert wenn man in ihr die Coefficienten $a_0 a_1 \ldots a_n$ der vorgelegten Grundform durch die entsprechenden Coefficienten $a_0' a_1' \ldots a_n'$ der linear transformirten Form ersetzt. Also in Formeln:

$$I(a_0 a_1 a_2 \ldots a_n) = \frac{1}{\delta^p} I(a_0' a_1' \ldots a_n')$$

Um den Vorgang zu veranschaulichen wähle ich als Beispiel die quadratische Form:

$$f = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1' x_2' + a_2 x_2'^2$$

$$f' = a_0' x_1'^2 + 2a_1' x_1' x_2' + a_2' x_2'^2$$

$$a_0' = a_0 \alpha_{11}^2 + 2a_1 \alpha_{11}\alpha_{21} + a_2 \alpha_{21}^2$$

$$a_1' = a_0 \alpha_{11}\alpha_{12} + a_1(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) + a_2 \alpha_{21}\alpha_{22}$$

$$a_2' = a_0 \alpha_{12}^2 + 2a_1 \alpha_{12}\alpha_{22} + a_2 \alpha_{22}^2$$

$$\mathcal{J} = a_0 a_2 - a_1^2$$

$$\mathcal{J}' = a_0' a_2' - a_1'^2 = a_0 a_2 (\alpha_{11}^2\alpha_{22}^2 + \alpha_{21}^2\alpha_{12}^2 - 2\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{22})$$

$$+ a_1^2 (4\alpha_{11}\alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{22} - \alpha_{11}^2\alpha_{22}^2 - 2\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{12}^2\alpha_{21}^2)$$

$$= (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})^2 (a_0 a_2 - a_1^2)$$

$\mathcal{J} = 0$ ist eine durch lineare Transformation unzerstörbare Eigenschaft der Form. z. B. $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$ bedeutet die Zerlegbarkeit der Form.

absolute Covariante ist eine Form, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Coefficienten der Grundform $a_0 \ldots a_n$ sind und die ...

Eine Covariante ist eine solche ganze rationale Function der Coefficienten $a_0 a_1 \ldots a_n$ und der Variabeln x_1, x_2, die sich nur um eine als Factor hinzutretende Potenz der Substitutionsdeterminante δ ändert, wenn man in ihr die Coefficienten ~~der vorgelegten Grundform~~ $a_0 a_1 \ldots a_n$ durch die entsprechenden Coefficienten $(a_0' a_1' \ldots a_n')$ der linear transformirten Form und gleichzeitig die Variabeln x_1, x_2 durch die linear transf. Variabeln $x_1' x_2'$ ersetzt.

Also

$$C(a_0 a_1 \ldots a_n x_1 x_2) \quad \frac{1}{\delta^p} \quad C(a_0' a_1' \ldots a_n' x_1' x_2')$$

enthält also auch noch die Variabeln.

Als Beispiel ohne Rechnung die Grundform selber. p ist der Covariante charakterisirt

und für eine andere ein allgemeineren
Invariante ist Specialfall der Covariante
andern. ~~Wir setzen wissen wir nun durch~~
~~stellung von Invarianten durch diesen~~
~~Definitionen~~ Invarianter Gebilde ist
der gemeinschaftliche Name. ~~Wir wissen~~
Es wir jetzt nach der Definition unser
Ziel sein die Inv. und Cov. wirklich
aufzustellen und ich gebe von vorne
herein den uns dabei leitenden Ge-
danken an:

Wir werden nämlich im Folgenden versuchen,
aus dieser Definition heraus Eigenschaften der
Invarianten und Covarianten zu folgern und
die Reihe solcher Eigenschaften so lange vervoll-
ständigen, bis ihre Kenntniss für jene invari-
anten Gebilde verhängnissvoll wird, bis es näm-
lich gelingt, umgekehrt mittelst der gefundenen
Eigenschaften Invarianten und Covarianten aufzu-
stellen oder wenigstens in die bestimmten Fesseln
sicheren

von Differentialgleichungen zu legen.

§ 4. Eigenschaften der Invarianten

$$\mathfrak{I}(a_0 a_1 .. a_n) = \sum z_{\nu_0 \nu_1 .. \nu_n} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} .. a_n^{\nu_n}$$

Um die erste Eigenschaft abzuleiten, benutzen wir den ersten Typus: $\left.\begin{aligned} x_1' &= \varkappa x_1' \\ x_2 &= \lambda x_2' \end{aligned}\right\} \delta = \varkappa\lambda$

Jene Definitionsgleichung soll für alle lineare Transf. gelten, um so mehr für jenen speziellen Typus. Der Weg ist nun vorgeschrieben. Also:

$$f' = a_0 \varkappa^n x_1'^n + \binom{n}{1} a_1 \varkappa^{n-1}\lambda x_1'^{n-1} x_2' + \binom{n}{2} a_2 \varkappa^{n-2}\lambda^2 x_1'^{n-2} x_2'^2 + \dots + a_n \lambda^n x_2'^n$$

Wir entnehmen daraus:

$$\left.\begin{aligned} a_0' &= \varkappa^n a_0 \\ a_1' &= \varkappa^{n-1}\lambda a_1 \\ a_2' &= \varkappa^{n-2}\lambda^2 a_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_n' &= \lambda^n a_n \end{aligned}\right\} \mathfrak{I}(a_0' a_1' \dots a_n') = \sum z_{\nu_0 \nu_1 .. \nu_n} \varkappa^{n\nu_0} a_0^{\nu_0} \varkappa^{(n-1)\nu_1} \lambda^{\nu_1} a_1^{\nu_1} \varkappa^{(n-2)\nu_2} \lambda^{2\nu_2} a_2^{\nu_2} \dots \lambda^{n\nu_n} a_n^{\nu_n}$$

$$= \sum z_{\nu_0 \nu_1 .. \nu_n} \varkappa^{n\nu_0 + (n-1)\nu_1 + (n-2)\nu_2 + .. \nu_{n-1}} \lambda^{\nu_1 + 2\nu_2 + .. n\nu_n} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} .. a_n^{\nu_n}$$

$$\sum z_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n} = (K1)^{-p} \sum z_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n} K^{n\nu_0 + (n-1)\nu_1 + \dots \nu_{n-1}} \Big|^{\nu_1 + 2\nu_2 + \dots n\nu_n} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n}$$

Was folgt nun aus dieser Forderung:

$$z_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n} = (K1)^{-p} z_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n} K^{n\nu_0 + (n-1)\nu_1 + \dots \nu_{n-1}} \Big|^{\nu_1 + 2\nu_2 + \dots n\nu_n}$$

$$1 = K^{-p + n\nu_0 + (n-1)\nu_1 + \dots \nu_{n-1}} \Big|^{-p + \nu_1 + 2\nu_2 + \dots n\nu_n}$$

$$n\nu_0 + (n-1)\nu_1 + \dots \nu_{n-1} - p = 0$$

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \dots n\nu_n - p = 0$$

$$n(\nu_0 + \nu_1 + \dots \nu_n) - 2p = 0$$

Wir wollen uns nun vergegenwärtigen, was wir damit gewonnen haben:

$\nu_0 + \nu_1 + \dots \nu_n =$ Grad (nicht Ordnung) der Glieder

$q = \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 + \dots \nu_n =$ Grad (nicht Ordg.) der Glieder $a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \dots a_n^{\nu_n}$

$p = 0\cdot\nu_0 + 1\nu_1 + 2\nu_2 + \dots n\nu_n =$ Gewicht " " " " "

1.) der Grad aller Glieder ist derselbe 2.) das Gewicht und zwar gleich jenem fraglichen Potenzexponenten 3.) zwischen beiden der Invariante charakteristischen

Zahlen besteht die Relation: hier

$$ng - 2p = 0$$

Die gefundenen Eigenschaften der Invarianten fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Alle Glieder einer Invariante besitzen denselben Grad g und dasselbe Gewicht p und es ist $ng - 2p = 0$

Das Gewicht p giebt zugleich die Potenzhöhe der Substitutionsdeterminante an, um welche sich die Invariante bei ihrer Transformation ändert.

| Kein willkürlicher Kunstgriff oder Winkelung. Sondern weil wir aus Rechnungsschwierigkeiten nicht auf einen Abstrich rechnen konnten, bewältige wir sie in Kreisen.

Beispiel: $n = 2$: $I = a_0 a_2 - a_1^2$ $\begin{cases} g = 2 \\ p = 2 = \text{Potenz} \end{cases}$

$ng - 2p = 0$

Wir wollen nun die ähnlichen Schlüsse zur Berechnung einer Covariante verwenden. Zuvor möchte ich aber noch zeigen, dass wir eine Covariante immer als eine homogene rat. F. auffassen kann ohne Beeinträchtigung der

Allgemeinheit.

$$C\left(a_0 a_1 \dots a_n x_1 x_2\right) = [m] + [s] + \dots$$

$$C\left(a_0' a_1' \dots a_n' x_1' x_2'\right) = [m]' + [s]' + \dots$$

$$[m] + [s] + \dots = \frac{1}{\delta^p}\left\{ [m]' + [s]' + \dots \right\}$$

$$[m] = \frac{1}{\delta^p}[m']$$

$$[s] = \frac{1}{\delta^p}[s']$$

Jede Covariante ist eine Form im Gegensatz zur Grundform. Übrigens ist ja aber auch die Grundform selbst eine Covariante.

$$C\left(a_0 a_1 \dots a_n x_1 x_2\right) = C_0 x_1^m + \binom{m}{1} C_1 x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{2} C_2 x_1^{m-2} x_2^2 + \dots \binom{m}{m} C_m x_2^m$$

$$C'\left(a_0' a_1' \dots a_n' x_1' x_2'\right) = C_0' x_1'^m + \binom{m}{1} C_1' x_1'^{m-1} x_2' + \dots C_m' x_2'^m$$

$$C_i = \sum_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n}$$

$$C_i' = \sum_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n} a_0'^{\nu_0} a_1'^{\nu_1} \dots a_n'^{\nu_n}$$

$$\binom{m}{i} \sum_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n} x_1^{m-i} x_2^i = \frac{1}{\kappa^{\nu_1 + 2\nu_2 + \dots n\nu_n}} \binom{m}{i} \sum_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n} K \; a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n}$$

$$\binom{m}{i} \frac{1}{\kappa^{-(m-i)-p+m\nu_0+(m-1)\nu_1+\dots\nu_{n-1}}} = \kappa^{-i-p+\nu_1+2\nu_2+\dots n\nu_n} \frac{1}{\kappa^{-(m-i)}} \frac{1}{\kappa^{-i}}$$

$$n\nu_0 + (n-1)\nu_1 + (n-2)\nu_2 + \dots \nu_{n-1} = p + m - i$$

$$\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots n\nu_n = p + i$$

$$n(\nu_0 + \nu_1 + \dots \nu_n) = 2p + m$$

$g = \nu_0 + \nu_1 + \dots \nu_n$ = Grad von C_i hängt nur von p, m, n : $ng - 2p = m$

$\nu_1 + 2\nu_2 + \dots n\nu_n = p + i$ hängt auch von i ab

d.h. Alle Glieder haben denselben Grad. Aber

die C_0 haben Grad g Gewicht p

C_1 --- g $p+1$

C_m --- g $p+m$

Satz: Jede Covariante ist eine Form. Setzen wir dieselbe dementsprechend in die k^{te} Gestalt:

$$C_0 x_1^m + \binom{m}{1} C_1 x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{2} C_2 x_1^{m-2} x_2^2 + \dots C_m x_2^m$$

so besitzen alle Glieder der Coefficienten $C_0, C_1, \dots$ den gleichen Grad g, dagegen das Gewicht p, $p+1 \dots p+m$. Das Gewicht des ersten Coefficienten C_0 nämlich p heißt das Gewicht der Cova-

riante und giebt zugleich die Potenzhöhe der Substitutionsdeterminante an, um welche sich die Covariante bei ihrer Transformation ändert. Die Ordnung der Covariante ist:

$$m = ng - 2p$$

Bemerkung dass nichts weiter folgt d. h. die Covariante bleibt ungeändert bei diesem Typus.

Ich habe vorhin darauf aufmerksam gemacht, dass man die ~~Covariante~~ Invariante als einen Spezialfall der Covariante auffassen kann. Das stimmt. Denn für $m = 0$ erhält man den vorigen Satz wieder. Bestätigung an dem Beispiel der Grundform selbst. Später übrige Anwend.

Alle bisherigen Eigenschaften beruhten darauf, dass wir den ersten und einfachsten Typus der linearen Transformation zu Grunde legten. Um weitere Eigenschaften der invarianten Gebilde zu entdecken, werden wir

nur folgerichtig auf den zweiten Typus schließen und zusehen, was man dessen Anwendung Neues liefert. Alles wird genau wie vorhin angesetzt, nur dass die Rechnung nicht mehr ganz so einfach ausfällt.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1' + \mu x_2' \\ x_2 &= x_2' \end{aligned}\right\} \delta = 1$$

$$f' = f(x_1' + \mu x_2', x_2') = a_0(x_1' + \mu x_2')^n$$

$$+ \binom{n}{1} a_1 (x_1' + \mu x_2')^{n-1} x_2' + \binom{n}{2} a_2 (x_1' + \mu x_2')^{n-2} x_2'^2 + \cdots$$

$$= a_0 x_1'^n + \binom{n}{1}(a_0\mu + a_1) x_1'^{n-1} x_2' + \binom{n}{2}(a_0\mu^2 +$$

$$= a_0 x_1'^n + \left(a_0\binom{n}{1}\mu + \binom{n}{1}a_1\right) x_1'^{n-1} x_2' + \left(a_0\binom{n}{2}\mu^2 + \binom{n}{1}a_1\binom{n-1}{1}\mu + \binom{n}{2}a_2\right) x_1'^{n-2} x_2'^2$$

$$= a_0 x_1'^n + \binom{n}{1}(a_0\mu + a_1) x_1'^{n-1} x_2' + \binom{n}{2}(a_0\mu^2 + 2a_1\mu + a_2) x_1'^{n-2} x_2'^2 + \cdots$$

$$a_0' = a_0$$

$$a_1' = \cdots + \mu a_0 + \mu_1$$

$$a_2' = a_0\mu^2 + 2a_1\mu + a_2 + 2a_1\mu + \cdots \quad a_0\mu^2 + 2a_1\mu + a_2$$

$$a_3' = a_0\mu^3 + 3a_1\mu^2 + 3a_2\mu + a_3 + 3a_2\mu + 3a_1\mu^2 + a_0\mu^3 + 3a_1\mu^2 + 3a_2\mu + a_3$$

$$a_i' = a_0\mu^i + \binom{i}{1} a_1\mu^{i-1} + \binom{i}{2} a_2\mu^{i-2} + \dots a_i$$

$$\mathfrak{J}(a_0\, a_1 \dots a_n) = \mathfrak{J}(a_0'\, a_1' \dots a_n')$$

Die a' hängen nur von den ursprünglichen a ab und von μ ab, wie es auch sein muss. Diese Gleichung soll nun für alle μ erfüllt sein. Wir differenziren also nach μ:

$$0 = \frac{d\,\mathfrak{J}(a_0' a_1' \dots a_n')}{d\mu} = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial a_0'}\frac{da_0'}{d\mu} + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial a_1'}\frac{da_1'}{d\mu} + \dots \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial a_n'}\frac{da_n'}{d\mu}$$

$$\frac{da_i'}{d\mu} = \binom{i}{1} a_{i-1}' = i\, a_{i-1}'$$

$$a_0' \frac{\partial \mathfrak{J}(a_0' a_1' \dots a_n')}{\partial a_1'} + 2a_1' \frac{\partial \mathfrak{J}(a_0' \dots)}{\partial a_2'} + \dots n a_{n-1}' \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial a_n'} = 0$$

oder auch wenn wir zu den ursprünglichen a zurückkehren:

$$a_0 \frac{\partial \mathfrak{J}(a_0 a_1 \dots a_n)}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \mathfrak{J}(a_0 a_1 \dots a)}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial \mathfrak{J}_{a_0 a_1 a_2}}{\partial a_3} + n a_{n-1} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial a_n} = 0$$

Hier wurde der unten vorangestrichene Satz hin.

Weiter folgt aus unserer Definition

(wie wir zur Befriedigung unserer mathem. Gewissens erkennen, wenn wir den obigen Beweisgang umgekehrt abwickeln)

gleichung nicht ist. Denn:

$$\frac{d\,J(a_0' a_1' \ldots a_n')}{d\mu} = 0 \quad \text{folglich } J(a_0' a_1' \ldots a_n') = \text{Const.}$$

Für $\mu = 0$ $\quad J(a_0 a_1 \ldots a_n) = \text{const.}$

$$J(a_0' a_1' \ldots a_n') = J(a_0 a_1 \ldots a_n)$$

Wir führen zur Abkürzung das Symbol ein:

$$D = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots + n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}$$

und haben dann den Satz:

Jede Invariante J genügt der Differentialgleichung:

$$DJ = 0$$

Wir finden hier bei dem Beispiel:

$J = a_0 a_2 - a_1^2$ bestätigt. Die gefundene Differentialgleichung ist einer der Grundpfeiler der Invariantentheorie für das bi-

nöre Variabelngebiet. Bevor wir aber hieraus weitere ~~aus diesen Resultaten die Früchte ziehen~~. Schlüsse ziehen, werden wir der Covariante nicht vergessen. Es kommt darauf an, die Definitionsgleichung der Covariante zu erfüllen, wenn wir mittelst der zweiten Typus transformiren. Die Ausdrücke für die a' haben wir schon berechnet:

$$C(a_0, a_1, \ldots a_n x_1 x_2) = C(a_0', a_1', \ldots a_n', x_1', x_2')$$

Die Gleichung muss wiederum für alle μ identisch bestehen:

$$\frac{d\,C(a_0 a_1 \ldots a_n x_1 x_2)}{d\mu} = \frac{\partial C}{\partial a_0'}\frac{da_0'}{d\mu} + \frac{\partial C}{\partial a_1'}\frac{da_1'}{d\mu} + \cdots + \frac{\partial C}{\partial a_n'}\frac{da_n'}{d\mu} + \frac{\partial C}{\partial x_1'}\frac{dx_1'}{d\mu} + \frac{\partial C}{\partial x_2'}\frac{dx_2'}{d\mu}$$

$$\frac{da_i}{d\mu} = C'a_{i-1}$$

$$\frac{dx_1}{d\mu} = \frac{dx_2}{d\mu} = \frac{d\,C(a_0 a_1 \ldots a_n x_1 x_2)}{d\mu} = \frac{d\,C(a_0' a_1' \ldots a_n' x_1' x_2')}{d\mu}$$

$$0 = \frac{d(C(a_0' a_1' \dots a_n', x_1' x_2'))}{d\mu} = \frac{\partial C'}{\partial x_1'} \frac{dx_1'}{d\mu}$$

$$\frac{\partial C(a_0 \dots a_n x_1 x_2)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\mu} = \frac{\partial C(a_0' \dots a_n' x_1' x_2')}{\partial a_0'} \frac{da_0'}{d\mu} + \frac{\partial C(a_0' \dots a_n' x_1' x_2')}{\partial a_1'} \frac{da_1'}{d\mu} + \dots \frac{\partial C(a_0' \dots a_n' x_1' x_2')}{\partial a_2'} \frac{da_2'}{d\mu}$$

$$\frac{da_i'}{d\mu} = i a_{i-1}', \qquad \frac{dx_1'}{d\mu} = -x_2'$$

$$0 = a_0' \frac{\partial C}{\partial a_1'} + 2 a_1' \frac{\partial C}{\partial a_2'} + \dots - x_2' \frac{\partial C}{\partial x_1'}$$

oder, indem wir zu den ursprünglichen a und x zurückkehren:

$$0 = a_0 \frac{\partial C}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial C}{\partial a_2} + \dots - x_2 \frac{\partial C}{\partial x_1}$$

d.h.

$$\Box C = x_2 \frac{\partial C}{\partial x_1}$$

Jede Covariante genügt ~~einer~~ der Differentialgleichung

$$\Box C = x_2 \frac{\partial C}{\partial x_1}$$

~~Bestätigung an dem Beispiel der Grundform selber~~

Etwas weiteres folgt aus unserer Definitionsgleichung bei Zugrundelegung der zweiten Transfor-

mationstypus nicht. Denn

$$\frac{d\,(a_0' a_1' \dots a_n' x_1' x_2')}{d\mu} = 0$$

$$(a_0' a_1' \dots a_n' x_1' x_2') = \text{const}$$

Für $\mu = 0$

$$(a_0 a_1 \dots a_n x_1 x_2) = \text{const}$$

$$(a_0', a_1', \dots a_n', x_1', x_2') = (a_0 a_1 \dots a_n x_1 x_2)$$

Für $n = 0$ erhalten wir die Differentialgleichung der Invariante wieder

Bestätigung an dem Beispiel der Grundform selber.

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots a_n x_2^n$$

$$Df = \binom{n}{1} a_0 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} 2 a_1 x_1^{n-2} x_2 + \dots n a_{n-1} x_2^{n-1}$$

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} = n a_0 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{1}(n-1) a_1 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots \binom{n}{1} a_{n-1} x_2^n$$

Wir kommen nun endlich zur Verwendung der dritten Transformationsgruppe

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1' \\ x_2 &= r x_1' + s x_2' \end{aligned}\right\} \delta = s$$

welcher uns keine neuen Schwierigkeiten

machen wird sondern viel mehr auf eine Repitition der vorigen Typen hinaus läuft.

$$f' = f(x_1', vx_1' + x_2')$$

$$= a_0 x_1'^n + \binom{n}{1} a_1 x_1'^{n-1}(vx_1' + x_2') + \binom{n}{2} a_2 x_1'^{n-2}(vx_1' + x_2')^2 + \dots$$

$$a_n(vx_1' + x_2')^n$$

$$= \left(a_0 + \binom{n}{1} a_1 v + \binom{n}{2} a_2 v^2 + \dots a_n v^n\right) x_1'^n + \left(\binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \cdot 2 a_2 v + \dots\right.$$

$$\left. + \binom{n}{1} a_n v^{n-1}\right) x_1'^{n-1} x_2'$$

$$+ \dots a_{n-1} + a_n x_2'^n$$

$$\left.\begin{aligned} a_0' &= a_0 + \binom{n}{1} a_1 v + \dots a_n v^n \\ a_1' &= a_1 + \binom{n-1}{1} a_2 v + \dots a_n v^{n-1} \\ &\dots \\ a_i' &= a_i + \binom{n-i}{1} a_{i+1} v + \dots a_n v^{n-i} \\ &\dots \\ a_n' &= a_n \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial a_i'}{\partial v} = \binom{n-i}{1} a_{i+1} = (n-i) a_{i+1}$$

$$C(a_0 a_1 \dots a_n x_1 x_2) = C(a_0' a_1' \dots a_n' x_1' x_2')$$

$$0 = \frac{dC}{dr} = \frac{\partial C'}{\partial a_0'}\frac{da_0'}{dr} + \dots \frac{\partial C'}{\partial a_n'}\frac{da_n'}{dr} + \frac{\partial C'}{\partial x_2'}\frac{\partial x_2'}{\partial r}$$

$$0 = n a_1' \frac{\partial C'}{\partial a_0'} + (n-1) a_2' \frac{\partial C'}{\partial a_1'} + \dots a_n' \frac{\partial C'}{\partial a_{n-1}} - x_1' \frac{\partial C'}{\partial x_2'}$$

$$\Delta = n a_1 \frac{\partial C'}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial C'}{\partial a_1} + \dots + a_n \frac{\partial C'}{\partial a_{n-1}} - x_1' \frac{\partial C'}{\partial x_2}$$

Jede Covariante genügt der Differentialgl.

$$\Delta C' = x_1' \frac{\partial C'}{\partial x_2}$$

wo das Differentiationssymbol Δ die Bedeutung hat:

$$\Delta = n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}}$$

Durch Spezialisierung für eine von den $x_1 x_2$ unabhängigen C' d.h. für J:

Jede Invariante genügt der Differentialgl.

$$\Delta J = 0$$

Bestätigung an den Beispielen

$$J = a_0 a_2 - a_1^2$$

$$C' = f.$$

Etwas weiteres folgt nicht.

Nun ~~weiter~~ haben wir die Kette der Eigenschaften für unsere Invarianten und Covarianten in gewissem Sinne abgeschlossen, denn wir können nun den Spieß umkehren und ~~Folgerungen~~ die Invarian durch die abgeleiteten Eigenschaften als bestimmt erachten.

~~Wir~~

Jede ganze rationale Funktion der Coeffizienten $a_0 a_1 \ldots a_n$ bezügl. der Coefficienten $a_0 a_1 \ldots a_n$ und der Variablen $x_1 x_2$, welche die in gewissen § abgeleiteten Eigenschaften besitzt, ist eine Invariante bezüg eine Covariante.

Nach unseren früheren Ausführungen ist nun die Richtigkeit dieses Satzes leicht einzusehen. Denn wir schlossen ja die Eigen-

schaften durch reihweise Anwendung unserer 3 Grundtypen und zeigten gleichzeitig, dass in keinem Falle noch weitere Eigenschaften geschlossen werden konnten. Das heisst doch mit anderen Worten Die Definitionsgl. der Covariante

$$C(a_0 \ldots \quad) = \frac{1}{\delta^p} C(a_0' \ldots a_i' \, x_1' \, x_2')$$

ist erfüllt für jeden Typus einzeln genommen. Sie ist also auch erfüllt, bei successiver Aufeinanderfolge jener 3 Typen und da wir zeigten, dass die allgemeine Trans. durch successive Aufeinanderfolge jener 3 Typen erzeugt werden konnte, so ist sie auch für die allgemeine Transf. erfüllt. Also, während wir früher die allg. Transf. zerlegten, um so jeden einzelnen Typus für sich leichter überwinden zu können, fassen wir jetzt zusammen, um auf die allg. Tr. Schlüsse ziehen zu können. Wir werden nun dazu schreiten, mittelst der gefun-

den Eigenschaften die Inv. und Cova-
rianten wirklich aufzustellen und
um nur auf die Weise zu überzeugen,
welche reich Ernte nun aus unseren
Bemühungen zu fällt. Zuvor
wird es jedoch notwendig sein, uns
noch etwas eingehender mit den beiden
Differentialsymbolen D und Δ zu beschäftige.

§ 5. Die Operationssymbole D und Δ

Es sind dies jene Differentialsymbole, auf
welche wir vorhin ~~gefu~~ notwendig geführt wur-
den. Wir wollen untersuchen, welchen Einfluss
ihre Anwendung auf Funktionen der Coefficienten $a_0 a_1 \ldots a_n$
hat.

$$\Phi = \sum \lambda_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \ldots a_n^{\nu_n} \qquad \begin{aligned} \nu_0 + \nu_1 + \ldots \nu_n &= g \\ 1\cdot\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots n\nu_n &= p \end{aligned}$$

d. h. homogene und isobare Funktionen der $a_0 a_1 .. a_n$ Wir betrachten zunächst nur ein Glied:

$$G = a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} .. a_n^{\nu_n}$$

$$\Delta G = n\nu_0 a_0^{\nu_0-1} a_1^{\nu_1+1} a_2^{\nu_2} .. a_n^{\nu_n} + (n-1)\nu_1 a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1-1} a_2^{\nu_2+1} a_3^{\nu_3} .. a_n^{\nu_n}$$

$$+ (n-2)\nu_2 a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2-1} a_3^{\nu_3+1} .. a_n^{\nu_n}$$

$$D\Delta G = n\nu_0$$

Es gilt dann der Satz:

Ist $\mathfrak{A}$ eine homogene isobare Funktion der Coefficienten $a_0 a_1 .. a_n$ von Grade g und vom Gewicht p, so gilt die Relation:

$$[D\Delta - \Delta D]\mathfrak{A} = (ng - 2p)\mathfrak{A}$$

~~Wir beweisen zunächst folgendes~~
~~Die Operationen D, Δ lassen den Grad g ungeändert, das Gewicht wird~~

d. h. in Worten die Ausübung der Operation $D\Delta - \Delta D$ kommt einer Multiplikation mit $ng - zp$ gleich κ. Jene Operateration bedeutet aber, dass erst die Operation Δ, dann D ausgeführt werden soll und dann das bei umgekehrter Reihenfolge erhaltene Resultat subtrahirt werden soll. $\mathfrak{F}$ bleibt bei Anwendg von D, Δ unge. ändert, dagegen $p = p \pm 1$. Bei $D\Delta$ u. ΔD bleibt also p unge ändert.

Wir beweisen zuerst folgendes:

Gilt der Satz für $\mathfrak{A}_1$, und für $\mathfrak{A}_2$, so gilt er auch von $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, wenn beide Functionen derselben Gradgrund dasselbe Gewicht p besitzen.

In der That:

$$[D\Delta - \Delta D]\mathfrak{A}_1 = (ng - zp)\mathfrak{A}_1$$

$$[D\Delta - \Delta D]\mathfrak{A}_2 = (ng - zp)\mathfrak{A}_2$$

$$[D\Delta - \Delta D](\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) = (ng - zp)(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)$$

Ferner beweisen wir:

Gilt der Satz von $\mathfrak{A}_1$ und von $\mathfrak{A}_2$, so gilt er auch von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$, wo nun keine Einschränkung bezüglich Grad und Gewicht statt findet.

$\mathfrak{A}_1 : g_1, p_1$

$\mathfrak{A}_2 : g_2, p_2$

$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 : g_1+g_2 \quad p_1+p_2$

d.H. Indem wir in § 4 die Eigenschaften von Inv. ableiteten, wurden wir auf gewisse Differentialgl. geführt, in welchen die Symbole D u. Δ eine Rolle spielten. Um später die Untersuch. nicht unterbrechen, mußte wir den § 5 diesem Studium dieser Symbole widmen. Wir betrachten sie also vorläufig ganz losgelöst von ihren Beziehungen zur Invariantentheorie und untersuchten ihren Einfluß auf homogene irg. bere Funktionen der (ganzen) coefficienten d.h. solcher Funktionen etc. An die Spitze stellten wir einen Satz, welcher eine gewisse komplementäre Beziehung zum Ausdruck bringt.

— Satz —

Eine Vertauschung der Reihenfolge macht gestattet Beweis nicht durch Rechnung...

$$[D\Delta - \Delta D]\mathfrak{A}_1 = (n g_1 - 2p_1)\mathfrak{A}_1$$

$$[D\Delta - \Delta D]\mathfrak{A}_2 = (n g_2 - 2p_2)\mathfrak{A}_2$$

$$[D\Delta - \Delta D](\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = D\Delta(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) - \Delta D(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2)$$

$$\Delta(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}_1 \Delta \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2 \Delta \mathfrak{A}_1$$

$$D\Delta(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = D\mathfrak{A}_1 \Delta \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1 D\Delta \mathfrak{A}_2 + D\mathfrak{A}_2 \Delta \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 D\Delta \mathfrak{A}_1$$

$$\Delta D(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = \Delta \mathfrak{A}_1 D\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1 \Delta D\mathfrak{A}_2 + \Delta \mathfrak{A}_2 D\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \Delta D\mathfrak{A}_1$$

$$[D\Delta - \Delta D](\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}_1 [D\Delta - \Delta D]\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2 [D\Delta - \Delta D]\mathfrak{A}_1$$

$$= (n g_2 - 2p_2)\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 + (n g_1 - 2p_1)\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$$

$$= \{n(g_1+g_2) - 2(p_1+p_2)\}\, \widetilde{F_1}\, \widetilde{F_2}$$

g $\quad$ p

$$= (ng - 2p)\, \widetilde{F_1}\, \widetilde{F_2}$$

Der Satz gilt nun für $a_i^{\nu_i}$ denn:

$$\Delta\, a_i^{\nu_i} = \nu_i (n-i)\, a_{i+1}\, a_i^{\nu_i - 1}$$

$$D\Delta\, a_i^{\nu_i} = \nu_i (n-i)(i+1)\, a_i^{\nu_i} + i\nu_i (n-i)(\nu_i - 1)\, a_{i+1}\, a_{i-1}\, a_i^{\nu_i - 2}$$

$$D\, a_i^{\nu_i} = \nu_i\, a_{i-1}\, a_i^{\nu_i - 1}$$

$$\Delta D\, a_i = \nu_i i (n-i+1)\, a_i^{\nu_i} + i\nu_i\, a_{i-1}(\nu_i - 1)$$

$$D\Delta - \Delta D = \nu_i (n - 2i)\, a_i^{\nu_i}$$

Es genügt vielmehr den Satz für a_i zu beweisen. also auch für $a_i^{\nu_i}$, also auch für $a_0^{\nu_0}\, a_1^{\nu_1}\, a_2^{\nu_2} \ldots$

Beispiel: $A = a_1 a_3 + 5 a_2^2$ und $n = 3$ $\left\{ \begin{matrix} g = 2 \\ p = 4 \end{matrix} \right.$

$$D = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial}{\partial a_3}$$

$$\Delta = 3 a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + 2 a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_3 \frac{\partial}{\partial a_2}$$

$$D\Delta A = a_0 a_3 + 5\cdot 2\cdot 2 a_1 a_2 + 3 a_2 a_1$$

$$= a_0 a_3 + 23 a_1 a_2$$

$$\Delta D\Delta A = 3 a_1 a_3 + 2\cdot 23 a_2^2 + \dots + 2\cdot 3\, a_1 a_3 \cdot$$

$$\Delta A = 2 a_2 a_3 + 5\cdot 2\, a_2 a_3$$

$$D\Delta A = 4 a_1 a_3 + 6 a_2^2 + 2\cdot 5\cdot 2 a_1 a_3 + 5\cdot 2\cdot 3 a_2^2$$

$$= 24 a_1 a_3 + 36 a_2^2$$

$$(D\Delta - \Delta D) A = -2 a_1 a_3 - 10 a_2^2 = -2A = (6-8)A$$

Ich mache übrigens schon hier darauf aufmerksam, dass die Zahl $ng - 2p$ gerade dieselbe ist, welch in unseren früheren Sätzen über Covarianten immer eine hervorragende Rolle spielte.

Aus der abgeleiteten Fundamentalformeln werden wir leicht noch weitere allgemeinere ableiten können nämlich

1.) D darauf angewendet: $D^2\Delta A - D\Delta DA = (ng-2p)DA$

2.) auf D angewendet: $D\Delta DA - \Delta D^2 A = (ng-2p+2)DA$

$$D^2\Delta A - \Delta D^2 A = 2(ng-2p+1)DA$$

1.) auf die letzte Formel wird D angewendet und ergibt:

$$D^3\Delta A - D\Delta D^2 A = 2(ng-2p+1)\,D^2 A.$$

2.) auf $D^2 A$ wird die ursprüngliche Formel angewendet und ergiebt:

$$D\Delta D^2 A - \Delta D^3 A = (ng-2p+4)\,D^2 A$$

$$D^3\Delta A - \Delta D^3 A = 3(ng-2p+2)\,D^2 A$$

und allgemein:

α.) $$\left[D^k\Delta - \Delta D^k\right] A = k(ng-2p+k-1)\,D^{k-1} A$$

Ferner das analoge für $\Delta^2, \Delta^3 \ldots$

1.) Δ auf die ursp. angewen: $\Delta D\Delta A - \Delta^2 D A = (ng-2p)\,\Delta A$

2.) Die ursp. auf Δ angewen: $D\Delta^2 A - \Delta D\Delta A = (ng-2p-2)\,\Delta A$

$$D\Delta^2 A - \Delta^2 D A = 2(ng-2p-1)\,\Delta A$$

und allgemein:

β.) $$\left[D\Delta^k - \Delta^k D\right] A = k(ng-2p-k+1)\,\Delta^{k-1} A$$

Die abgeleiteten Formeln werden nur künftig von grossem Nutzen sein, zumal sie weitläufige Reihung überflüssig machen.

§ 6 Bestimmung der Invarianten und Covarianten

Nach den wenn auch nicht unelegantes doch etwas trockenen Betrachtungen des vorigen Paragraphen, befinden wir uns nun in der Lage, die reifen Früchte unserer bisherigen Bemühungen pflücken zu können wir behandeln zunächst die Invariante.

Eine Invariante ist eine ganze rat. Funktion der Coefficienten allein, derselben Grad und dasselbe Gewicht p d. h. Sie ist ein Ausdruck A

$$I = A \quad g, p\text{-cont}, ng - 2p = 0$$

$$\Delta A = 0$$

Angenommen wir hätten einen solchen Ausdruck $\Delta A = 0$ $ng - p = 0$ gefunden, wir bilden dan die folgende Reihe:

$$\underset{p}{A} \quad \underset{p+1}{\Delta A} \quad \underset{p+2}{\Delta^2 A} \quad \Delta^3 A \ldots \quad \underset{p+k}{\Delta^k A} \ldots$$

so behaupte ich diese Reihe bricht ab, so dass $\Delta^k A = 0 \quad \Delta^{k-1} A \neq 0 \quad k \leqq ng$

$$\left[D\Delta^k - \Delta^k D\right] A = k(ng - 2p - k + 1)\,\Delta^{k-1} A$$

$$D\Delta^k A - \Delta^k D A = 0 = k(-k+1) = 0$$

$$k = 1$$

$$\Delta A = 0 \quad \text{d.h.}$$

Wenn wir alle Eigenschaften der ~~Form~~ § 4 zus. zusammenstellen:

$$J : \underline{g}, \underline{p}, \underline{ng - 2p = 0}, \underline{DJ = 0}, \underline{\Delta J = 0}$$

Die Erfüllung der ersten Eigenschaft bedingt die letzte gleich mit.

Jede homogene rationale Funktion der Coefficienten $a_0 a_1 .. a_n$ vom Grade g und dem Gewichte $p = \frac{ng}{2}$ ist eine Invariante, sobald sie der Differentialgleichung

$$DJ = 0$$

genügt.

ub. Z. Nachdem wir in § 5 D u. Δ und ihre Wirkung auf homog. invar. F. studirt hatten, gingen wir in § 6 zur wirklichen Best. der Inv. über. Dieselben waren für eine Invariante die Folge Eigenschaften erforderlich. Jetzt erkannten wir — und sprachen den Satz aus: Fortsch. keine Reduk.

Es ist nun keine Forderung mehr über flüssig. Bevor wir eine systematische Bestimmung der Invarianten, so weit möglich durchführen, behandeln wir die folgenden beiden Beispiele.

1.) $n = 2,\ g = 2$ fdg. $p = 2$

$$J = z\, a_0 a_2 + z' a_1^2 \qquad z = z' \text{ Dies ist die einzige.}$$

2.) $n = 3,\ g = 3$ fg. $p = \frac{9}{2}$ aber keine Invariante möglich.

Allgemein:
Formen ungerader Ordnung besitzen keine Invarianten ungeraden Grades.

3.) $n = 4,\ g = 2$ fdg. $p = 4$.

$$J = z\, a_0 a_4 + z' a_1 a_3 + z'' a_2^2$$

$$= a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 \qquad \Delta J = 0 \text{ ist von selbst erfüllt.}$$

Der Fortschritt gegenüber dem letzten Satze in § 4 besteht darin: Dort wurden eine Reihe Eigenschaften angegeben, welche hinreichten zur Bestimmung der Invariante und Invariante. Hier wurden diejenigen Eigenschaften, welche

von selbst erfüllt ~~war~~ sind, deren Hinzufügung also überflüssig war, ausgeschieden. ~~Damit ist~~ und da wir uns nun diese überflüssigen ausgeschieden, deren Eigenschaften nicht zu kennen brauchen, so ist unserem letzten Satze entsprechend eine Invariante bereits also vorhanden bestimmt, sobald $g, p = \frac{ng}{2}$ $D = 0$ ist. Wir werden nun die analogen Betrachtungen für die Covariante ausführen. Wie bestimmt man eine Covariante?

$$C = (_0x_1)^m + \binom{m}{1}(_1x_1)^{m-1}x_2 + \binom{m}{2}(_2x_1)^{m-2}x_2^2 + \cdots + (_mx_2)^m$$

$C_0 \cdots g, p,$
$C_1 \cdots g, p+1$
$C_2 \cdots g, p+2$
$\vdots$
$C_m \quad g, p+m$

$\Big\} \; m = ng - 2p$

Vorgelegt ist die Form n ten Grades f. Ich wähle g, p und bilde $m = ng - 2p$, dann wird ~~das~~ unsere Covariante von der m ten

Ordnung ausfallen, woraus für g, p die Bedingung $-2p \geq 0$ erhalten wird. Wir wollen nun die weiteren Bedingungen in's Auge fassen.

1.) $D C = x_2 \frac{\partial C}{\partial x_1}$, 2.) $\Delta C = x_1 \frac{\partial C}{\partial x_2}$

1.) $D C_0 \cdot x_1^m + \binom{m}{1} D C_1 x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{2} D C_2 x_1^{m-2} x_2^2 + \dots D C_m x_2^m$

$= m C_0 x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{1}(m-1) C_1 x_1^{m-2} x_2^2 + \dots + \binom{m}{m-1} C_{m-1} x_2^m$

$D C_0 = 0$

$D C_1 = C_0$

$D C_2 = 2 C_1$

$\dots\dots$

$D C_m = m C_{m-1}$

2.) $\Delta C_0 \cdot x_1^m + \binom{m}{1} \Delta C_1 \cdot x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{2} \Delta C_2 x_1^{m-2} x_2^2 + \dots + \Delta C_m x_2^m$

$= \binom{m}{1} C_1 x_1^m + \binom{m}{2} 2 C_2 x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{3} 3 C_3 x_1^{m-2} x_2^2 + \dots + m C_m x_2^{m-1} x_1$

$\Delta C_0 = m C_1$ | $\Delta C_{m-1} = C_m$

$\Delta C_1 = (m-1) C_2$

$\Delta^2 C_2 = (m-2) C_3$

$\dots\dots$ | $\Delta C_m = 0$

Um diese beiden Gleichungs-systeme zu erfüllen, bestimme ich C_0 von vorgeschriebenem Grade g, Gewichte p und so dass $\mathfrak{D}C_0 = 0$. Dann sind die übrigen Coefficienten successive zu berechnen:

$$C_1 = \frac{1}{m} \Delta C_0$$

$$C_2 = \frac{1}{m \cdot m-1} \Delta^2 C_0$$

$$C_3 = \frac{1}{m-2} \Delta C_2 = \frac{1}{m \cdot m-1 \cdot m-2} \Delta^3 C_0$$

$$C_K = \frac{1}{m \cdot m-1 \cdots m-K+1} \Delta^K C_0$$

$$C_m = \frac{1}{m \cdot m-1 \cdots 1} \Delta^m C_0$$

Diese Gleichungen sind nun erfüllt. Und es soll gezeigt werden dass nun auch alle übrigen von selbst erfüllt sind. Formel β liefert:

$$\mathfrak{D}\Delta^k C_0 - \Delta^k \mathfrak{D} C_0 = k(ng - 2p - k + 1)\, \Delta^{k-1} C_0$$

$$m(m-1)\cdots(m-k+1)\, \mathfrak{D} C_k = k(m-k+1)\, m(m-1)\cdots(m-k+2)\, C_{k-1}$$

$$\Delta C_k = k\, C_{k-1}$$

Also auch diese Gleichungen sind erfüllt.

$$C_0,\ \Delta C_0,\ \Delta C_0,\ \Delta^{k-1} C_{k-1} \neq 0\ \Delta^k C_0 = 0$$

$$k(m-k+1) = 0 . \quad k = m+1$$

$$\Delta^{m+1} C_0 = 0,\ \Delta^m C_0 \neq 0$$

$$\Delta C_m = \frac{1}{m\, m-1 \cdots 1},\ \Delta^{m+1} C_0 = 0$$

Auch das Wachsen der Gewichte p um eine Einheit für jedes folgende Glied trifft zu. Die Covariante lautet

$$C = C_0 x_1^m + \Delta C_0 x_1^{m-1} x_2 + \frac{1}{1\cdot 2!} \Delta^2 C_0 x_1^{m-2} x_2^2 + \cdots + \frac{1}{m!} \Delta^m C_0 x_2^m .$$

G. H. In § 6 das Verfahren zur Darst. von Inv. u. Covariante entwickelt. 1.) Inv. 2.) Covariante. Zusammenhang beider. Für die Covariante war dann der Satz ausgesprochen:

Bedeutet C_0 eine homogene isobare Funktion der Coefficienten $a_0\, a_1 \ldots a_n$

vom Grade g und dem Gewichte p, welche der Differentialgl.

$$\Delta C_0 = 0$$

genügt, so ist:

$$C = C_0 x_1^m + \frac{1}{1!}\Delta C_0 x_1^{m-1} x_2 + \frac{1}{2!}\Delta^2 C_0 x_1^{m-2} x_2^2$$

$$+ \ldots + \frac{1}{m!}\Delta^m C_0 x_2^m$$

eine Covariante vom Grade g, dem Gewichte p und der Ordnung $m = ng - 2p$. (C_0 heißt die Quelle der Covariante)

Der Fortschritt gegenüber dem letzten Satze in § 4 tritt klar zu Tage. Auch ist eine noch weitere Reduktion nicht mehr möglich, da die übrig bleibenden Bedingen nun so beschaffen sind, daß keine mehr entbehrlich ist. Die Bedingungen also nicht bloß notwendig und hinrei-

chend, sondern auch auf die geringste Zahl und die einfachste Gestalt reduzirt. Um das Verfahren an einem Beispiel zu veranschaulichen gehen wir: a) $n=3 \quad g=2 \quad p=1$ Beide Grundformen selbst minimalen.
b) $n=3 \quad g=3 \quad p=3 \quad m=3$

$$C_0' = 2a_0^2 a_3 + 2' a_0 a_1 a_2 + 2'' a_1^3 \qquad \text{weiter keine}$$

$$C_0 = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^3 + 3(a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x_2$$

$$* - 3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 - (a_0 a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_2^3) x_2^3$$

$g(a') = \partial^2 g_{a_0}$

Ich will die Reihe der Beispiele nicht vermehren, weil wir später noch von dem fraglichen Verfahren den ausgiebigsten Gebrauch machen werden.

Ehe wir zu den Anwendungen ~~XXXX~~ übergehen, möchte ich hier ein kurzes § einschalten, welcher ein gewisses ~~allgemeines~~ unterscheidendes Merkmal der invarian-

den Bildungen behandelt, nämlich

§ 7. Gerade und schiefe Invarianten.

Der Invariante resp. Covariante kommen noch die charakteristischen Zahlen zu:

$n, g, p = \frac{ng}{2}$

$n, g, p \quad , m = ng - 2p$

Je tiefer wir in die Structur und das Gefüge der invarianten Bildungen einblicken, desto mehr wird sich eine Unterscheidung der ~~Fälle~~ Fälle aufdrängen, jenachdem jene charakteristische Zahl sich in Bezug ihrer Theilbarkeit durch 2 verhalten. Schon vorhin erkannte wir ~~dass dass~~ gelegentlich, dass Formen ungerader Ordnung nur Invarianten gerader Grade

besitzen. Ein ähnlicher Satz gilt für Covarianten: Form gerader Ordg besitzt nur Covariante gerader Ordg. Viel wesentlicher ist die Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Gewichte. Gerade sind schiefe Invarianten resp. Covarianten. Wir wollen eine auf diese Unterscheidung bezügliche Betrachtung anstellen.

$$J(a_0 a_1 \dots a_n) = \frac{1}{\delta^p} J(a'_0 a'_1 \dots a'_n)$$

$$f' = a'_0 x_2'^n + \binom{n}{1} a'_1 x_2'^{n-1} x_1' + \dots$$

$$x_1 = x_2'$$
$$x_2 = x_1'$$
$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$$
$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1$$
$$\delta = -1$$

$$a'_0 = a_n$$
$$a'_1 = a_{n-1}$$
$$\dots$$
$$a'_i = a_{n-i}$$

$$J(a_0 a_1 \dots a_n) = (-1)^p J(a_n a_{n-1} \dots a_0)$$

Ist p gerade, so ist J gleich den

Bei der Vertauschung der Coeff. $a_0 a_1 \dots a_n$ mit resp. $a_n a_{n-1} \dots a_0$ ändert sich eine gerade Invariante garnicht, eine schiefe nur um ihr Vorzeichen.

Beispiel $a_0 a_2 - a_1^2 \quad a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$

$$(a_0 a - a x_1 x_2) = \frac{1}{\delta p} (a_0' a' - a' x_1' x_2')$$

$$(a_0 a_1 \cdot a x_1 x_2) = \frac{n}{(-1)^p} (a_n a_{n-1} \cdot a_0 x_2 x_1)$$

$$(_0 x_1^m + \binom{1}{1} {}_1 x_1^{m-1} x_2 + \dots + (_m x_2^m = (-1)^p \left\{ \binom{}{0} x_1^m + \binom{}{1} + \binom{m}{1} \binom{}{m-1} x_1^{m-1} x_2 + \binom{}{2} x_2^m \right.$$

$$(_0 = (-1)^p (_m)$$

$$(_1 = (-1)^p (_{m-1})$$

$$(_m = (-1)^p (_0)$$

Bei der Vertauschung der Coeff. $a_0 a_1 \dots a$ mit resp. $a_n a_{n-1} \dots a_0$ geht dabei die covarianten Coefficienten $(_i$ im Falle einer geraden Covariante in $(_{n-i}$, im Falle einer schiefen Covariante in $-(_{n-i}$ über.

Zusammenfassung beider Sätze.

Beispiel $(' = (a_0^2 a_4 - 3 a_0 a_1 a_3 + 2 a_1^2) x_1^3 + \dots$

D geht in Δ über und umgekehrt. Also können wir allen früheren Sätzen eine geeignete Modifikation geben und es war nur in ~~Rücks~~ Rücksicht auf unsere Bequemlichkeit, wenn wir D gewisser Hinsicht bevorzugten. So folgt z. B. für eine Invariante aus $\Delta J = 0$ auch $D J = 0$.

[Wir kommen nun endlich zur systematischen Aufstellung der Invariante u. Covariante für die Form der erste, zweite Ordnung etc. nämlich

*M. H. Gewisser unterscheidender Merkmal, Gerade, Schiefe, $x_1' = x_2'$, $x_2' = x_1'$. Sätze, Anwendung und die gegenseitige Beziehung und die Gleichberecht. Δ, D. Systematische Aufstellung.

63.

§ 8 Die Grundformen der ersten bis vierte Ordnung

Zur einer Diskussion der Forme im invariantentheoretischen Sinne gehört natürlich die Aufstellung aller Invariante und Covariante derselben, die wir nun systematisch beginnen wollen.

Zu dem Zwecke schreiben wir uns noch einmal die erforderliche Eigenschaft für Inv. u. Cov. auf.

1.) $n = 1$ Die Grundform selbst ist eine Covariante

Für eine Invariante haben wir:

$$J = \sum \lambda a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \qquad \nu_0 + \nu_1 = g \qquad ng - 2p = 0$$

$$= \sum \lambda a_0^{p} a_1^{p} \qquad 1 \cdot \nu_1 = p \qquad g = 2p$$

$$\nu_0 = \nu_1 = p$$

$$D J = \sum p\, a_0^{p} a_1^{p-1} = 0$$

$$\lambda = 0$$

Die lineare Form besitzt also keine Invariante]

Desgleichen wäre es auch leicht zu zeigen, dass die Discr. sich selber und ihre Potenzen keine Covariante besitzt. Aber wir wollen auf diesen Punkt nun vorläufig eingehen, also sich der gegenwärtige § nur der Aufstellung der existirenden Invarianten und Covarianten für die Formen bis zur 4ten Ordnung beschäftigen wird. Ob mit den aufgestellten Covarianten auch wirklich alle ~~möglichen~~ denkbaren erschöpft sind, soll einer späteren Sorge vorbehalten bleiben. Wir gehen also zur quadratischen Form über:

$n=2$: $f = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$

~~Discr.~~ $g=2, p=2$, $h = a_0 a_2 - a_1^2$

$n=3$: $f = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$

$g=4, p=6$ $d = a_0^2 a_3^2 - 3a_1^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_3 + 4a_0 a_2^3 - 6 a_0 a_1 a_2 a_3$

$g=2, p=2, m=2$ $H = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1'^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1' x_2' + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2'^2$

Derselbe Ausdruck, der für $n=2$ eine Invariante lieferte. Bestätigung durch Vertauschung von a_i mit a_{3-i}

$g=3, p=3, m=3$ $T = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1'^3 + \dots$ schon gewesen.

$n = 4$: $g = 2, p = 4 : i = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$

$g = 3, p = 6$ $j = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4$

$g = 2, p = 2$ $n = 4$: $\mathfrak{L} = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1^3 x_2$

$+ (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) x_1^2 x_2^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) x_1 x_2^3$

$+ (a_2 a_4 - a_3^2) x_2^4$

Berechnung der letzten Glieder durch Vertauschung von a_i mit a_{4-i}

Endlich $g = 3, p = 3$ $n = 6$

Wir dürfen es nur nicht verdriessen lassen, auch diese Rechnung noch durch zuführen denn abgesehen davon, dass wir nur durch diese Rechnung in der Anwendung des bisherigen Satzes befestigen, haben wir nach Aufstellung dieser Covariante T einen Abschluss erreicht. Wir haben dann nämlich alle existirenden Inv. und Covarianten

der Grundform bis zum 4 ten Ordnungsgrad ist, sondern damit auch die bekanntesten und meist genannten invarianten Bildungen aufgestellt

Also:

$$(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^6 + (a_0^2 a_4 + 2a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2) x_1^5 x_2$$

$$+ (5 a_0 a_1 a_4 - 15 a_0 a_2 a_3 + 10 a_1^2 a_3) x_1^4 x_2^2 + (-10 a_0 a_3^2 + 10 a_1^2 a_4) x_1^3 x_2^3$$

$$+ (-5 a_0 a_3 a_4 + 15 a_1 a_2 a_4 - 10 a_1 a_3^2) x_1^2 x_2^4 + (-a_0 a_4^2 - 2 a_1 a_3 a_4$$

$$+ 9 a_2^2 a_4 - 6 a_2 a_3^2) x_1 x_2^5 + (-a_1 a_4^2 + 3 a_2 a_3 a_4 - 2 a_3^3) x_2^6$$

Tabelle:

Die Inv: und Cov: mit dem Indexpaar g, m

$n=1$	$f_{1,0}$					
$n=2$	$f_{1,2}$	$h_{2,0}$				$= a_0 a_2 - a_1^2$
$n=3$	$f_{1,3}$	$d_{4,0}$	$H_{2,2}$	$T_{3,3}$		$= (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + \dots$ $= (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^3 + \dots$
$n=4$	$f_{1,4}$	$i_{2,0}$	$J_{3,0}$	$H_{2,4}$	$T_{3,6}$	$= -a_1 a_2 \dots) x_1^2 + \dots$ $(a_0^3 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + \dots) x_1^6$

Es ist dies das vollständige invariante System der Grundformen bis zur vierten Ordnung, und wir wollen häufig auf die Bildungen dieses Systems zurückkommen und davon Anwendungen zu machen haben. M. H. Wollst. Liste von Inv. u. Cov. gefunden und tabellarisch zusammengestellt. Bevor zur allgem. Grundf. sollen einige Bemerkungen Platz finden, welche sich nur auf die Wohl eine Bemerkung. Wir haben, dass Co von $H_{2,2}$ wie von $H_{2,4}$ mit $h_{2,0}$ übereinstimmte. Ebenso das C_0 von $T_{3,6}$ mit dem C_0 von $T_{3,3}$. Und in der That. Jede Covarianten, quelle kann man benutzen als die Quelle einer Covariante für eine höhere Grundformen höheren Ordnung. Das ist leicht einzusehen:

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots + a_n x_2^n = (a_0 x_1 + a_1 x_2)^n$$

$C_0, g, p,$

$n: f = a_0 x_1^n + .. a_n x_2^n \quad m = ng - 2p \quad \Delta C_0 = 0$

$C = C_0 x_1^m + \Delta C_0 x_1^{m-1} x_2 + .. \quad \Delta = n a_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + ..$

$n' > n: f = a_0' x_1^{n'} + .. a_{n'}' x_2^{n'} \quad m' = n'g - 2p = m + g(n'-n)$

~~Kovariante $C_0 x_1^{m'} + \Delta C_0 x_1^{m'-1} x_2 + ..$ aus $\Delta = n a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + ..$~~

$\Delta C_0' = 0 \quad \Delta' = a_0' \frac{\partial}{\partial a_1'} + .. \quad n a_{n'} \frac{\partial}{\partial a_{n'-1}'} + n' a_{n'}' \frac{\partial}{\partial a_{n'-1}'}$

Δ enthält ja nicht die Ordnung sondern nur Index ab.
Ist daher als Quelle zu benutzen und die zugehörige Kovariante besitzt die höhere Ordnung $m' = n'g - 2p$ und lautet:

$C' = C_0' x_1^{m'} + \Delta C_0' x_1^{m'-1} x_2 + .. \quad \Delta'^{m'} C_0' x_1^{m'} \quad \Delta' = n a_0' \frac{\partial}{\partial a_1'} + ..$

Also die Quellen sind die gleichen, nicht aber die Kovarianten selbst. Unsere Tabelle

liefert also auch gleichzeitig eine Reihe Covariantenquellen für höhere Grundformen. d.h. H ~~ist~~ ergiebt nicht nur für die cubische und biquadratische Form zu ~~ein~~ je eine Covariante $H_{2,2}$, $H_{2,4}$ Anlass ~~und ebenso~~ sondern auch für die Grundformen 5ter und 6ter Ordnung zu einer Covariante $H_{2,6}$, $H_{2,8}$ etc. und ebenso $T_{3,3}$, $T_{3,6}$ ... Diese Bemerkung hat um so grössere Bedeutung, als wir ~~später erkennen werden~~ wissen, dass die ~~Kenntniss der~~ Quelle ~~x nicht nur~~ zur Construktion ~~und Untersuchung~~ der Covariante vollkommen ausreicht ~~sondern auch für alle Rechnungen genügt~~, ~~und wir somit nur noch mit Quelle, statt mit Covariante selbst zu rechnen brauchen~~ Wir schreiben in diesem Sinne: $C = C_0 x_1^m + \dots$

Bemerkung II. Jede in den Coefficienten der Grundform homogene und isobare Funktion der Invarianten Covarianten ist ~~xx~~ selbst eine Invariante oder Covariante. Beweis mittelst Definitions-Gleichung.

II

Dr. Hilbert. 71.

Colleg: Invariantentheorie.

Rhesa Nr. 10

Beispiel: $\Delta f^2 + 4 T^2$, $i^3 + 2 j^2$, … Solche natürlich nicht mit aufgeführt. ∞ viele.

§ 9 Die Invarianten und Covarianten 2ten und 3ten Grades.

Der nächste vorzunehmende Schritt besteht naturgemäß in der Verallgemeinerung der im vorigen § erhaltenen Resultate. Während wir bisher eine spezielle Grundform behandelten, fragt es sich nunmehr darum, ob wir auch für eine allgemeine Grundform von der Ordnung n Invarianten oder Covarianten bestimmen oder gar ein abgeschlossenes System solcher angeben können.

1.) $g = 1$ $\quad C_0 = a_i \quad i a_{i-1} \quad i = 0$ d. h. Grundform ist die einzige.

2.) $g = 2$, p.

a.) $C_0'' = 2 a_0 a_p + 2' a_1 a_{p-1} + 2'' a_2 a_{p-2} + \dots + 2^{(\frac{p-1}{2})} a_{\frac{p-1}{2}} a_{p \frac{+1}{2}}$ $+ \dots + 2^{(\frac{p}{2})} a_{\frac{p}{2}}$

a.) p ungerade, C'' schief.

$C_0 = 2' a_0 a_{p-1} + 2 2'' a_1 a_{p-2} + 3 2'' a_2 a_{p-3} + \dots$

Es wird solche Covarianten nur vom geraden Gewichte $\mu = 2\pi$ geben, nämlich

$$C_0 = a_0 a_\mu - \binom{\mu}{1} a_1 a_{\mu-1} + \binom{\mu}{2} a_2 a_{\mu-2} - + \cdots$$

$$+ (-1)^{\pi-1} \binom{\mu}{\pi-1} a_{\pi-1} a_{\pi+1} + (-1)^{\pi} \tfrac{1}{2} \binom{\mu}{\pi} a_\pi^2$$

$$\Delta C_0 = - \binom{\mu}{1} a_0 a_{\mu-1} + \binom{\mu}{2} \cdot 2 a_1 a_{\mu-2} - 3 \binom{\mu}{3} a_2 a_{\mu-3} + \cdots$$

$$+ \cdots (-1)^{\pi-1} \binom{\mu}{\pi-1} (\pi-1) a_{\pi-2} a_{\pi+1} + (-1)^{\pi} \binom{\mu}{\pi} a_\pi^2$$

$$(-1)^{\pi-1} \binom{\mu}{\pi-1} (\pi+1) a_{\pi-1} a_\pi + \cdots + (\mu-2) \binom{\mu}{2} a_2 a_{\mu-3} - \binom{\mu}{1} (\mu-1) a_1 a_{\mu-2}$$

$$+ (-1)^{\pi} \binom{\mu}{\pi-2} (\pi+2) a_{\pi-2} a_{\pi+1} \qquad + \mu a_0 a_{\mu-1}$$

$$\Omega\varphi_\mu = \left(a_0 a_\mu - \binom{\mu}{1} a_1 a_{\mu-1} - + \cdots (-1)^{\pi} \tfrac{1}{2} \binom{\mu}{\pi} a_\pi^2 \right) x_1^{2\mu-2p} + \cdots$$

Die allgemeine Grundformbesitzt für jeden geraden $\mu = 2\pi$ eine Covariante zweiten Grades

$$\varphi_\mu = (f,f)_\mu = (\qquad\qquad) x_1^{2(\mu-\mu)} + \cdots$$

Dieselbe heißt die μ^{te} Ueberschiebung der Grundform.

Für ~~xyz~~ $p + n = p$ ist es eine Invariante aber dann muss n gerade sein d. h. als spezielle Folge ~~Die~~ Die allgemeine ~~Grundform~~ jener Sätze.

Jede Grundform gerader Ordnung besitzt eine Invariante zweiten Grades nämlich ihre ~~n~~te Ueberschiebung

$$(f,f)_n = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}^2$$

Beispiel: h und i

3.) $q = 3$ Gab es keine ~~ganzzahligen~~ verschiedenen Invarianten und Covarianten vom Grade zwei, so gibt es aber ~~die Covarianten~~ verschiedene Covarianten vom Grade 3 nämlich: $p = 2\pi + 1$

~~$C_0 = a_0 [a_0 a_p - \binom{p}{1} a$~~

$$C_0 = a_0 \cdot \Big[a_0 a_p - \frac{p-2}{1} a_1 a_{p-1} + \frac{p-1}{1}\frac{p-4}{2} a_2 a_{p-2}$$

$$- \frac{p-1}{1}\frac{p-2}{2}\frac{p-6}{3} a_3 a_{p-3} + \cdots + (-1)^{\pi} \frac{(p-1)(p-2)\cdots\pi+2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots\pi} a_\pi a_{\pi+1}\Big]$$

$$-2a_1 \Big[a_0 a_{p-1} - \frac{p-1}{1} a_1 a'_{p-2} + \frac{p-1}{1}\frac{p-2}{2} a_2 a_{p-3} + \cdots + (-1)^{i} \frac{1}{2}\frac{(p-1)(p-2)\cdots(\pi+1)}{1\cdot 2\cdots\pi} (a_\pi$$

Beweis. Beispiel $p = 3$. $\pi = 1$

Ab. H. Während wir im §§ 8 die speziellen Grundformen der ersten 4 Ordnungen in Betracht zogen, stellten wir uns in gegenwärtige § auf einen allgemeineren Standpunkt. Wir gingen nämlich von einer allgemeinen Grundform $n$ter Ordnung aus

1.) $g = 2$, p gerade

$$\mathfrak{G}_p = \Theta_1 f_p = \left(a_0 p a_p - (p) a_1 a_{p-1} + \cdots + (-1)^{\pi} \tfrac{1}{2} \binom{p}{\pi} a_\pi^2\right) x_1^{2(n-p)} + \cdots$$

2.) $g = 3$, p ungerade

$$\mathfrak{G}_p = \Big(a_0 \Big[a_0 a_p - \frac{p-2}{1} a_1 a_{p-1} + \frac{p-1\ p-4}{1\cdot 2} a_2 a_{p-2} - \frac{p-1\ p-2\ p-6}{1\cdot 2\cdot 3} a_3 a_{p-3} + \cdots + (-1)^{\pi} \frac{p-1\ p-2 \cdots \pi+2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot \pi} a_\pi a_{\pi+1}\Big]$$

$$- 2a_1 \underbrace{[\quad]}_{143} \Big) x_1^{3n-2p} + \cdots$$

Wir hatten schon gesehen, wie für $p = 3$ die Covariante $\mathfrak{G}_3$ der cubischen oder kubisch-quadratischen Form zu Tage trat. Wir hatten das letztere Ergebnis noch nicht in einen Satz ausgesprochen. Ich möchte mir

erlauben, Ihnen den folgenden Vortrag vorzuschlagen.

Die allgemeine Grundform f besitzt für jeden ungeraden $p = 2n+1$ die Covariante dritten Grades:

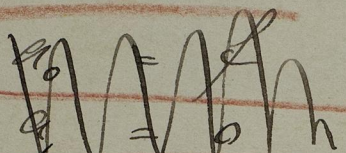
$$\varphi_p = (a_0[\quad]^2 - 2a_1[\quad]^1)\, x_1^{3n-2p} + \dots$$

Beispiel $\varphi_3 = T$ bereits erkannt. $p=1$?

Wir befinden uns nun in der Lage die Richtigkeit eines Theorems einzusehen, welches ~~nach meinem Gedächtnisse~~ zu den schönsten, allgemeinsten und wichtigsten in der binären Invariantentheorie gehört. Dieses Theorem lautet:

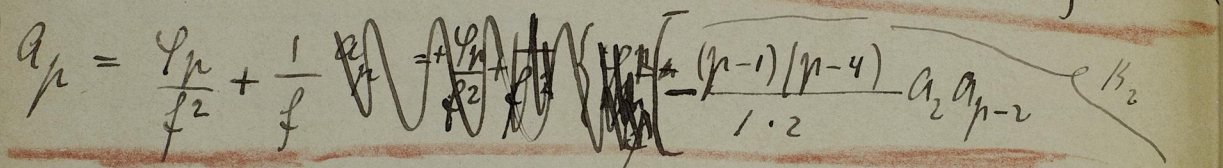
Jede Covariante der Grundform f ist, bis auf ~~abgesehen von~~ einen Faktor, ein ganzes rationales Aggregat ihrer selbst als eine ganze rationale Funktion der ~~Coefficienten~~ der ersten Covarianten $f, \varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_n$ darstellbar. Diese

Darstellung ergiebt sich, sobald wir in der Quelle der vorgelegten Covariante (wo $a_0 = \frac{1}{2} a_1 = 0$ und dann) für die übrigen Coefficienten $a_0, a_1 \ldots a_n$ der Reihe $a_2 a_3 \ldots$ die folgenden Ausdrücke einsetzen:



K_1

$$a_p = \frac{1}{f}\left\{\varphi_p - \binom{p}{2} a_2 a_{p-2} + \binom{p}{3} a_3 a_{p-3} + \cdots - (-1)^{\pi} \frac{1}{2}\binom{p}{\pi} a_\pi^2\right\} \quad (p = 2\pi)$$



K_2

$$(p = 2\pi+1) \qquad + \frac{p-1\ p-2\ p-6}{1\cdot 2\cdot 3} a_3 a_{p-3} + \cdots - (-1)^{\pi} \frac{p-1\ p-2 \ldots \pi+2\cdot 1}{1\cdot 2 \ldots \pi} a_{\pi+1} a_\pi \Big\}$$

Erläuterung, wie der Theorem zu verstehen ist. Der erste Theil leicht. Der zweite lehrt die Darstellung wirklich ausführen. Zum Beweise führen wir die Abhängige $K_1 - K_2$ ein.

Die vorgelegte Covariante sei:

$$C = C_0 x_1^m + \dots$$

$C_0 = G.R(a_0 a_1 \dots a_n)$ } Quelle der darzustellenden vorgelegten Covariante

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= a_0 x_1^n \\ \varphi_2 &= \mathfrak{A}_2 x_1^{2(n-2)} + \dots \\ \varphi_3 &= \mathfrak{A}_3 x_1^{3(n-2)} + \dots \\ \varphi_n &= \mathfrak{A}_n x_1^{m'} + \dots \end{aligned}\right\}$$ Quelle der darstellenden Covariante.

Von rationalen Quellen wissen wir $D = 0$. Von C_0 weiter nichts dagegen φ_2 enthält nur $a_0 a_1 a_2$

φ_3 - - - $a_0 a_1 a_2 a_3$

φ_{n-1} - - $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$

φ_n - - - $a_0 a_1 \dots a_n$

$$g\mathfrak{A}_p = a_0 a_p - \binom{p}{1} a_1 a_{p-1} - K_1 \qquad p \text{ gerade}$$

$$g\mathfrak{A}_p = a_0^2 a_p - \frac{p-2}{1} a_0 a_1 a_{p-1} - K_2 a_0 - 2a_1 K_3 \qquad p \text{ ungerade}$$

$$a_p = \frac{1}{a_0}\left\{ g_p + \binom{p}{1} a_1 a_{p-1} + K_1 \right\} \qquad p\text{-gerade}$$

$$a_p = \frac{1}{a_0^2} g_p + \frac{1}{a_0}\left\{ \frac{p-2}{1} a_1 a_{p-1} + K_2 \right\} + \frac{2a_1}{a_0^2} K_3 \qquad p \text{ ungerade}$$

$$C_0 = \mathfrak{G}_n(a_0 q_1 \dots a_n) = \frac{1}{a_0^n}\mathfrak{G}_n(a_0, a_1, q_2, q_3 \dots q_n)$$

$$a_0^\mu C_0 = \mathfrak{G}_n(a_0 a_1 q_2 q_3 \dots q_n)$$

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{G}_n}{\partial a_0} D a_0 + \frac{\partial \mathfrak{G}_n}{\partial a_1} D a_1 + \frac{\partial \mathfrak{G}_n}{\partial q_2} D q_2 + \dots + \frac{\partial \mathfrak{G}_n}{\partial q_n} D q_n$$

$$0 \equiv 0 + \frac{\partial \mathfrak{G}_n}{\partial a_1} a_0 + 0 + \dots + 0$$

$\frac{\partial \mathfrak{G}_n}{\partial a_1} = 0$ d.h. $\mathfrak{G}_n$ ist von a_1 unabhängig.

Wir können also bei der Berechnung der ganzen rationalen Funktion $\mathfrak{G}_n$ überall $a_1 = 0$ setzen. Wir haben.

$$a_0^\mu C_0 = \mathfrak{G}_n(a_0 q_2 q_3 \dots q_n)$$

Links und rechts steht eine Covariante. Auch die dazu gehörige Covariante selbst müssen wir überschieben. d.h.

$$f^\mu C = \mathfrak{G}_n(f, q_2 q_3 \dots q_n)$$

$$C = \frac{1}{f^\mu}\mathfrak{G}_n(f, q_2 q_3 \dots q_n)$$

Der erste Theil bewiesen. Der zweite Theil ergiebt sich wenn wir in unsere Transformation für

$$\begin{aligned} q_0 &= f \\ q_1 &= 0 \\ q_2 &= q_2 \\ &\cdots \\ q_n &= q_n \end{aligned}$$

setzen und in der That erhalten wir dann die im Texte des Theorems angegebenen Formeln:

$$q_p = \frac{1}{f(p,1)} \quad p = \text{gerade}$$

$$q_p = \frac{1}{f} q_p + \frac{1}{f} k_2 \quad p = \text{ungrade}.$$

Die Tragweite und Nützlichkeit der Theoreme werden wir nachher sehr bald in Anwendungen erkennen und ich will daher in gegenwärtigen § noch nicht mit Beispielen vorgreifen. Da wir jedoch jetzt an einen gewissen Abschnitt gelangt sind, so möchte ich mir erlauben

einen kurzen resapitulierenden Rück-
blick auf das zu werfen, was wir bis-
jetzt in der Theorie der binären Formen
an Resultaten und Methoden kennen
gelernt haben, indem ich zugleich
einige historische Bemerkungen
dazu einschalte.

An die Spitze unserer Ausführungen hatten wir
~~eine~~ die Definition der Fundamentalbegriffe gestellt.
Nämlich

1.) Begriff der Form = ganze rationale homogene 2 Charakteristik.
Zahlen Variablenzahl, Ordnung.

2.) Begriff der linearen Transformation. Ganze lineare Funktion
der alten Variabeln.

Diese Begriffe sind sehr alt und ihr Ursprung auf Jour-
Lagrange, oder noch weiter zurückzuführen.

3.) Begriff der Invariante.

Wir haben den Begriff der Invariante und Covariante

nur für die binäre Grundform festgelegt. Aber die Ausdehnung ist später leicht. Eine Invariante oder Covariante war:

eine Determinante. Es erscheint zunächst willkürlich gerade eine Potenz der Substitutions-determinante zu wählen, aber Hölder in math. nat. Mitteilung in Tübinge-

Die Entdeckung und Festlegung des Begriffes der Invariante schreiben wir Cayley zu, der in Verein und stetem Wettbewerb mit Sylvester auch alle jene Eigenschaften und Differentialgleichungen aufstand:

Cayley Philos. Transactions Bd 144–160

Sylvester Cambridge & Journal Bd 4 – 8

Doch hat die Differentialgleichung wohl später aber ebenfalls selbstständig gefunde

Aronhold Crelle 39, 62

Dahinter greifen durch bedeutende Leistungen ein die italienischen Math.

Faà di Bruno, der Verf. d. jener bereits erwähnten Lehrbücher über binäre Formen welches allerdings an Kürze und Anordnung des Stoffes zu wünschen übrig lässt

und vor allem

Brioschi Ann. di Matthematica Bd. 1–4.

Die Methode zur Ableitung war folgende:

Zerlegung der lineare Transf.

Ausscheidung der überflüssigen Eigenschaften.

~~Unser Resul~~ Unsere Betrachtungen nach fanden wir schliesslich ein Bedingungssystem, welches nicht nur nothwendig und hinreichend sondern auch auf die einfachste Gestalt reducirt

war. ~~Notwendig war~~ Um diese Schlüsse zu machen war eine systematische Untersuchung von D – Δ ~~~~ Die Hauptformel findet sich in den Faà di Bruno'schen Lehrbüchern. Eine vollständige Behandlung und Ableitung der Formeln in meiner Dissertation.

Anwendung auf specielle Formen   Uebrig   Minski Satz.

M. H. Ich hatte ~~mit einem kurzen Rückblick bege~~ in der letzten Vorles: damit begonnen in einem kurzen Rückblick alle diejenigen Resultate und Methoden kurz zusammenzufassen, die wir bisher kennen gelernt haben. Ich hatte dabei auch eine historische und Litteraturangaben gemacht. Ich will ~~~~ zu diesen letzteren keine neuen mehr hinzufügen, sondern nur bemerken, dass 2 der angeführten Lehrbücher der Invariantentheorie hinten als Anhang ziemlich ausführliche Litteraturnachweise enthalten nämlich:

~~~~ Salmon Algebr. d. l. F.

Faà di Bruno T. d. binären Formen.
~~~~

Etwas bis 1876. Das Weitere finden sie dann in den Fortschritten der M. in dem für die Th. der Formen reservirte Capitel.

Was nun die Sache selbst betrifft, so hatten wir nach Aufstellung des Begriffs der Invariante, eine Reihe von Eigenschaften aus dem Begriff heraus abgeleitet. Die Methode dabei war die folgende: Zerlegung der lin. Transformation. Die gefundene Reihe von Eigenschaften war erschöpfend, so vollständig, dass nun gekehrt.... Es blieb noch übrig, die überflüssigen auszuscheiden. Endlich resultirte ein Bedingungssystem nothwendig hinreichend, auf die einfachste Form reducirt.

$g, p, m = ag - rp, \quad \Delta C_0 = 0 \quad C_a = C_0 x_1^m + \Delta C_{1,1} x_1^{m-1} x_2 + \ldots$

Wir studirten noch den ~~allgemeinen~~ Transformationstypus $x_i = x_i'$ $x_2 = x_1'$ $\delta = -1$. Zwang uns zwischen gerade u. schiefe Invarianten u. Covarianten zu unterscheiden, und wir erkannten, dass die Inv. und Cov. eine einfache Symmetrie zeigten, wenn wir die Coeffizienten in ihrer Reihenfolge umkehrten. Wir behandelten dann ~~die~~ systematisch die ersten 4 Grundformen und stellten die erhaltenen Inv. und Cov. tabellarisch zusammen. Dabei ~~ergaben sich~~ machten wir einige ~~Daten~~ allgemeinere Bemerkungen, von welchen ich nur diejenige hervorhebe, wonach jede Covariante ~~für eine Form~~ auch als Covariante gelte für eine höhere Grundform ~~der~~ gezählt werden kann. (Ausserdem erkannten wir als selbstverst., dass jede ganze rat. F. v. Inv. u. Cov.) Während wir bisher über die Vollständigkeit ~~&~~ von Covariantensystemen noch nichts wussten, gelangten wir nun zu dem abschliessenden Satze der letzten Paragraphen:

$$C = \frac{1}{2\mu} \mathcal{G} \cdot R(f, g_2 g_3 \dots g_n)$$

g_p — $\begin{matrix} g=2 & p=0 \\ g=3 & p=1 \end{matrix} \Big\} (m=2)$, $p \begin{cases} m = 2(n-p) \\ m = 3n-2p \end{cases}$

Die g_p konnte allgemein angegeben werden.

Wir wollen nun in Folgenden diesen den 9 §§ als den Grundstock betrachten, auf dem wir aller weitere aufbauen und zwar sollen uns bei diesem Aufbau die beiden folgende Gesichtspunkte leiten:

1.) Um die gefundenen Sätze zu bewähren, sollen wir Anwendungen machen, ff Gleichungstheorie, Geometrie

2.) Um die Basis zu verbreitern, wollen wir die gefundenen Begriffe, Methoden und Resultate zu verallgemeinern, zu erweitern suchen.

Allen folgende wollen wir also immer unter den Gesichtspunkt entweder der Anwendung oder der Verallge-

meinerung unsere bisherige Sätze erblicken. Und so kommen wir denn zu dem folgenden §, wo es sich vorgleich um Anwendung auf die Gleichungstheorie handeln wird.

§10 Diskussion und Faktorenzerlegung der cubischen und biquadratischen Grundform

Konstruktion der Covarianten der Formen

$$f = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

$$\varphi_2 = (f,f)_2 = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + \dots$$

$$\varphi_3 = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^3 + \dots$$

Durch diese sind nach unserem Theorem alle anderen bis auf eine Potenz von f rational ausdrückbar. Wir hatten aber in der Tabelle von § 8 gefunden:

$n = 3$: $f_{1,3}$, $d_{4,0}$, $H = \varphi_2$, $T = \varphi_3$

Also $d_{4,0} = \frac{1}{p^n} \mathfrak{H} R(f, \varphi_2, \varphi_3)$.

$$a_0 = f$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = \frac{\varphi_2}{f}$$
$$a_3 = \frac{\varphi_3}{f^2}$$

$$d = a_0^2 a_3^2 - 3a_1^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_3 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3$$
$$= \frac{\varphi_3^2}{f^2} + 4\frac{\varphi_2^3}{f^2} = \frac{1}{f^2}\left(\varphi_3^2 + 4\varphi_2^3\right) = \frac{1}{f^2}\left(T^2 + 4H^3\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(df^2 - T^2\right) = H^3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{d}f + T\right)\frac{1}{2}\left(\sqrt{d}f - T\right)$$

$$l = l_1 x_1 + l_2 x_2$$
$$m = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

Jeder der beiden Faktoren rechts ist daher selbst ein Imbus etwa:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{d}f + T\right) = l^3$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{d}f - T\right) = m^3$$

d.h. $\sqrt{d}f = l^3 + m^3$, $T = l^3 - m^3$, $H = lm$

$$f = \frac{1}{\sqrt{d}}\left(l + \varepsilon m\right)\left(l + \varepsilon^2 m\right)\left(l + \varepsilon^3 m\right) \qquad \varepsilon = \sqrt[3]{1}$$

Unsere Ueberlegung führen also nicht nur zu einer Lösung der cubischen Gleichung sondern liefert auch einen tiefen Einblick in das analytische Gefüge der Invarianten & Covarianten. Beispiel:

$$f = 4x_1^3 + 9x_1^2x_2 + 18x_1x_2^2 + 17x_2^3$$

$$a_0 = 4,\ a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 17$$

$$d = 1600 \qquad \mathfrak{T} = 110x_1^3 - 90x_1^2x_2 - 630x_1x_2^2 - 670x_2^3$$

$$f\sqrt{d} + \mathfrak{T} = 10(3x_1 + x_2)^3,\quad f\sqrt{d} - \mathfrak{T} = 50(x_1 + 3x_2)^3$$

$$\mathfrak{H} = 5(3x_1 + x_2)(x_1 + 3x_2)$$

Die Ausartungen. In welchen ~~Fällen~~ Ausnahme-fälle werden unsere allgemein durchgeführten Ueberlegungen unmöglich?

1.) $d = 0$ $\quad \frac{1}{2}\mathfrak{T} = \Phi l^3 = -m^3$ | Kann $m = -l$

$\mathfrak{H} = -l^2$

$f = l^2(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\left\{\frac{l+m}{\sqrt{d}}\right\}$ f enthält jenen Faktor l doppelt.

d.h. d ist die Discriminante der cubischen Form = Discriminante von $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{H} = (a_0a_2 - a_1^2)x_1^2 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)x_1x_2 + (a_1a_3 - a_2^2)x_2^2$$

M. H. Wir hatten die Diskussion der cub. F dadurch eingeleitet, dass wir durch direkte Anwendung. Dieser Formel war der Schlüssel einerseits zur Lösung, andererseits zur Eröffnung eines Einblicks. Handelt es sich um wirkliche Berechnung, so läuft natürlich auf das selbe hinaus. Davon die invari. Lösung von einer bemerkenswerten Eleg. und Vorzüglichkeit wie in noch höherem Maße bei 4ter Ord. Diskussion der Ausartung.

1.) $d = 0$ $f, \mathcal{H}, T$

2.) $\mathcal{H} = 0$

2 $\mathcal{H} = 0, \quad d = 0, \quad T = 0$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = k$$

$a_1 = k a_0$

$a_2 = k^2 a_0$

$a_3 = k^3 a_0$

$$f = a_0 (x_1 + k x_2)^3$$

Damit ist die Diskussion der cubischen Form, ihrer Covarianten und Invariantengebilde, sowie ihrer Ausartungen erledigt und wir gehen zur biquadratischen Form über:

$$f = a_0 x_1^4 + \ldots \quad a_4 x_2^4$$

Construktion des Covariantensystems:

$$\varphi_2 = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^4 + \ldots = \mathcal{H}_{2,4}$$

$$\varphi_3 = (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^6 + \ldots = T_{3,6}$$

$$\varphi_4 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 = i_{2,0}$$

$n = 4, \quad f_{1,4}, \; i_{2,0}, \; j_{3,0}, \; \mathcal{H}_{2,4}, \; T_{3,6}$

Also $$j = \frac{1}{f^{\mu}} \, G\,R(f, i, \mathcal{H}, T)$$

$$j = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4$$

$$a_0 = f$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = \frac{\mathcal{L}_2}{f} = \frac{\mathcal{H}}{f}$$
$$a_3 = \frac{\mathcal{L}_3}{f^2} = \frac{T}{f^2}$$
$$a_4 = \frac{i}{f} - 3\frac{a_2^2}{f} = \frac{1}{f^3}\left\{ i f^2 - 3\mathcal{H}^2 \right\}$$

$$j = \frac{\mathcal{H}}{f^3}\left\{ i f^2 - 3\mathcal{H}^2 \right\} - \frac{\mathcal{H}^3}{f^3} - \frac{T^2}{f^3}$$

$$= \frac{1}{f^3}\left\{ i\mathcal{H} f^2 - 4\mathcal{H}^3 - T^2 \right\}$$

~~$T^2 = +4\mathcal{H}^3 - i\mathcal{H}f^2 + jf^3$~~

$$T^2 = -4\mathcal{H}^3 + i\mathcal{H}f^2 - jf^3$$

d.h. das Quadrat von T ist rational ausdrückbar durch $i, j, f, \mathcal{H}$. Diese Relation wird nun für die biquadratische Form dasselbe sein, was nur die frühere Formel für die cubische Form war. Wir hatten damals die rechte Seite zerlegt und thun jetzt das entsprechende in den wir

die cubische Gleichung lösen

$$\lambda^3 - i\lambda \mp 2j = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$$

$\lambda = -\frac{2\mathcal{H}}{f}$ ergiebt:

$$-8\mathcal{H}^3 + 2i\mathcal{H}f^2 \mp 2jf^3 = \mp(-2\mathcal{H} - \lambda_1 f)(-2\mathcal{H} - \lambda_2 f) \quad (-2\mathcal{H} - \lambda_3 f)$$

$$-2\mathcal{T}^2 = +(2\mathcal{H} + \lambda_1 f)(2\mathcal{H} + \lambda_2 f)(2\mathcal{H} + \lambda_3 f)$$

$$-\frac{\mathcal{T}^2}{4} = \left(\mathcal{H} + \frac{\lambda_1}{2} f\right)\left(\mathcal{H} + \frac{\lambda_2}{2} f\right)\left(\mathcal{H} + \frac{\lambda_3}{2} f\right)$$

$$\mathcal{H} + \frac{\lambda_1}{2} f = \mp\varphi_1^2$$
$$\mathcal{H} + \frac{\lambda_2}{2} f = \varphi_2^2$$
$$\mathcal{H} + \frac{\lambda_3}{2} f = \varphi_3^2$$

$$f = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_3}(\varphi_1 - \varphi_3)(\varphi_1 + \varphi_3) = \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_3}(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_2 + \varphi_3)$$

schon damit wäre die Gleichung gelöst aber der größeren Symmetrie und Eleganz wegen verfahren wir wie folgt.

$$f = lmpq = lm \cdot pq = lp \cdot mq = lq \cdot mp$$

$\varphi_1 - \varphi_2$	$\vdots\, lm$	$\varphi_1 - \varphi_3 : lp$	$\varphi_2 - \varphi_3 \vdots lq$
$\varphi_1 + \varphi_2$	$\vdots\, pq$	$\varphi_1 + \varphi_3 : mq$	$\varphi_2 + \varphi_3 \vdots mp$

Danach finden wir z. B. lm, wenn wir den gemeinsamen Linearfaktor von $\varphi_1 - \varphi_2$ und $\varphi_1 - \varphi_3$ bestimmen.

Abh. H. Der Diskr. der big. F. legten wie die Fundamentalformel zu Grunde. Ableitung durch § 9. enthält den eine andere Gestalt. Formensysteme. Die Faktorisierung geschah so: Das System $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ vermittelte zugleich eine Einteilung. Sorgfältig besitzt es eine Reihe von Eigenschaften, deren Studium wir uns vorbehalten. Wir erwähnten [illegible] nur die lineare Relation zwischen den Quadraten Anwendungen.

Die cubische Resolvente ist dadurch charakterisirt die Eigenthümlichkeit, dass die Coefficienten Invarianten sind. Das System der drei quadratischen Formen $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ besitzt eine Fülle bemerkenswürdiger Eigenschaften, durch die dasselbe also solches auch umgekehrt hinreichend charakterisirt werden kann. Wir werden darauf später noch einmal zurückkommen, während ich hier nur erwähne.

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \varphi_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \varphi_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \varphi_3^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1-\lambda_3)\varphi_1^2 + (\lambda_3-\lambda_1)\varphi_2^2 + (\lambda_1-\lambda_2)\varphi_3^2 = 0$$

$$H = \frac{\lambda_2\varphi_1^2 - \lambda_1\varphi_2^2}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{\lambda_3\varphi_1^2-\lambda_1\varphi_3^2}{\lambda_3-\lambda_1} = \frac{\lambda_3\varphi_2^2-\lambda_2\varphi_3^2}{\lambda_3-\lambda_2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,T = \varphi_1\varphi_2\varphi_3$$

Das System der drei quadratischen Formen ist übrigens von Hermite in die Theorie der bilinearen Formen eingeführt, dem bekannten Pariser Veteranen der Mathematik

Der

Annahmen.

1. $\lambda_1 = \lambda_2$ | $a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = -\frac{i}{3} \quad a_3 = -2j$

$$d = 4j^2 + 4\frac{i^3}{3^3} = \frac{4}{27}(27j^2 - i^3)$$

$27j^2 - i^3 = 0$ | $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3j}{i} \quad \lambda_3 = \frac{6j}{i}$

$\varphi_1 = \varphi_2$

$$f = 2\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\lambda_1 - \lambda_2} 2\varphi_1 m = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_3}(\varphi_1 - \varphi_3)(\varphi_1 + \varphi_3) = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_3} l^2(1-m^2)(1+m^2)$$

φ_1 ist ein Quadrat $= l^2$, $\varphi_3 = l m'$

$\mathfrak{H} = \varphi_1$, $\frac{1}{2}\sqrt{-\mathfrak{D}} = l^5 m'$ (d. h. $27j^2 - i^3 = 0$ ist)

$$\mathfrak{H} = l^2 \frac{\lambda_3(l^2 - \lambda_1 m'^2)}{\lambda_3 - \lambda_1}$$

2.) $\varphi_1 \equiv 0$ $\quad f = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_3}(\varphi_1^2 - \varphi_3^2) = -\frac{2}{\lambda_1 - \lambda_3}\varphi_3^2$ d. h. $9j^2 - i^3 = 0$

d. h. $\lambda_1 = \lambda_2$ d. h. $\varphi_2 = 0$

$\mathfrak{H} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_3}\varphi_3^2$ $\quad \mathfrak{D} = 0$ ist auch umgekehrt für diesen Fall charakteristisch.

3.) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\quad i = 0 \quad j = 0$

$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = l^2$ d. h. $m' = 1$ $\quad f = l^3 m''$

$\mathfrak{H} = \varphi_1^2 = l^4$ $\quad \frac{1}{2}\sqrt{-\mathfrak{D}} = l^6$

4.) $\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0 \qquad \mathcal{H} = 0$

$a_0 a_2 - a_1^2 = 0$

$a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0$

$a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2$

$a_1 a_4 - a_2 a_3 = 0$

$a_2 a_4 - a_3^2 = 0$

$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \lambda$

$f = a_0 (x_1 + \lambda x_2)^4$

$i = 0 \quad j = 0 \quad : \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\mathcal{H} = 0, \quad \mathcal{T} = 0$

Das ist die letzte, die stärkste Annahme die Combination von 2.) und 3.), über diese hinaus kann es keine weiteren mehr geben. denn hier verschwinden sofort alle Invarianten und Covarianten, es wird wieder $f = 0$

Tabellarische Zusammenstellung der Annahmen:

Die verk. Criterien		Bedeutung für f		Bedeutung für $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$
1.)	$27 j^2 - i^3 = 0$	f enthält λ^2		$\varphi_1 = \lambda^{\text{II}} \varphi_2 = l^2$, φ_3 enthält λ
2.)	$\mathcal{T} = 0$	f enthält φ_3^2		$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$
3.)	$i = 0, j = 0$	f enthält l^3		$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = l^2$
4.)	$\mathcal{H} = 0$	f enthält l^4		$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$

$f = 0$ hat also im ersten Falle eine Doppelwurzel $27 j^2 - i^3 = 0$, im

zweiten Falle 2 Doppelte Wurzeln, etc. und wir haben auch gleich die rationalen Stücke hierzu dazu.

Beispiel: $f = x_1^4 + x_2^4$ | $a_0 = a_4 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$$\mathcal{H} = x_1^2 x_2^2$$
$$\mathcal{T} = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \sqrt{-1} \cdot 2$$

$i = 1$ $j = 0$ $\quad 1 - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 0 \; \lambda_2 = 1 = \lambda_3 = -1$

$$\varphi_1 = x_1 x_2$$
$$\varphi_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} (x_1^2 + x_2^2)$$
$$\varphi_3 = \sqrt{-\tfrac{1}{2}} (x_1^2 - x_2^2)$$

$$f = (x_1 + \sqrt{i}\, x_2)(x_1 + \sqrt{-i}\, x_2)(x_1 - \sqrt{i}\, x_2)(x_1 - \sqrt{-i}\, x_2)$$
$$= (x_1 + \sqrt{i}\, x_2)(x_1 - \sqrt{i}\, x_2)(x_1 + \sqrt{-i}\, x_2)(x_1 - \sqrt{-i}\, x_2)$$

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left(x_1^2 \left[\sqrt{-i} + i \right] + x_2^2 \left[\sqrt{-i} - i \right] \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-i}} \left(x_1^2 + i x_2^2 \right)$$

Wir haben $\sqrt{-i}$ in der letzten Vorles. die cub. und big. vollständig diskutiert und ihre möglichen Anordnungen tabellarisch zusammengestellt.

Bevor wir diesen § der Anwendungen verlassen möchte ich noch einer gewissen rationalen Funktion der Coefficienten erwähnen, welche schon vor Entdeckung der Invariantentheorie eine hervorragende Rolle spielte, nachher aber mit Unge-

Wenigen heit und Erfolg sich in die Gedan-
kenreihe der Invariantentheorie einschalten
lies ich meine Discriminante.

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G} R(a_0 a_1 \dots a_n)$$

Ihre Definition. Bis auf jener Forderung einer doppelten
Zahl ist eine Bedingung nothwendig und hinreichend.

$$\mathfrak{D} = \Pi(\alpha_i - \alpha_k)^2 = \mathfrak{G} R(a_0 \dots a_n)$$

Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{D}$ eine Invariante ist.

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G} R(a_0 a_1 \dots a_n) = 0$$

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{G} R(a_0' a_1' \dots a_n') = 0 = \mathfrak{G} R(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n a_0 a_1 \dots a_n)$$

d. h. $\mathfrak{D}' = F(\alpha_1 \alpha_2 \dots) \mathfrak{D}$

Wir berechnen den Grad, in den wir zuerst der Ge-
wicht bestimmen. $p = n(n-1) = \frac{ng}{2}$. $g = 2(n-1)$

Satz: Die Discriminante einer Grundform n^{ter} Ordnung ist eine Invariante $2(n-1)^{ten}$ Grades.

Beispiel $n = 2$. $\mathfrak{D} = a_0 a_2 - a_1^2$, wie es auch in der That ist.

$n = 3$ $\mathfrak{D} = d$ $(g = 4)$

$n = 4$ $\mathfrak{D} = 27 j^2 - i^3$ $(g = 6)$

Durch den Begriff [illegible]

§ 11 Simultane Invarianten.

Wir kommen jetzt zur Darlegung eines außerordentlich wichtigen Begriffs, der sich beim Streben nach Verallgemeinerung nun notwendig aufdrängt und dessen Verständnis wie ich glaube nun jetzt keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr bieten wird. Während wir nämlich früher nur eine Grundform betrachteten ~~und jetzt mehrere~~ und die Invariante damit die Definitions-gl.:

$$(f a_0 a_1 - a_n x_1 x_2) = \frac{1}{f_r}((a_0' a_1' \cdot x_1 x_1'))$$

definierten, legen wir nun gleichzeitig mehrere Grundformen zu Grunde

$$f = a_0 x_1^n$$

$$F = A_0 x_1^N + (N) A_1 x_1^{N-1}$$

Wir transformieren

$$f' = a_0' x_1'^n + \cdots$$

$$F' = A_0' x_1'^N + \cdots$$

und haben dann gehen so vorbereitet zur Definition der Simultan Invariante über, in dem wir dieselbe analog der Definition der gewöhnlichen Invarianten und Covarianten, wie folgt, formulieren:

Eine Simultan invariante resp. Covariante der Grundformen f und F ist eine solche ganze rationale Function (resp. der Coefficienten sämtlicher Variabelen von den Coefficienten derselben), die sich nur um eine als Factor hinzutretende Potenz der Substitutionsdeterminante Δ ändert, wenn man in ihr die Coefficienten durch die entsprechenden Coefficienten der linear transformirten Formen und die Variabelen durch die linear transformirten Variabelen ersetzt.

Also:

$$\Phi(a_0 a_1 \ldots a_n, A_0 A_1 \ldots A_N, x_1 x_2) = \frac{1}{\Delta^p}\,\Phi(a'_0 a'_1 \ldots a'_n A'_0 A'_1 \ldots A'_N x'_1 x'_2)$$

Als Beispiel diene die Simultan invariante zweier quadratischer Formen $n = N = 2$

$$\mathcal{J} = a_0 A_2 - 2 a_1 A_1 + a_2 A_0$$

$$a_0' = a_0\alpha_{11}^2 + 2a_1\alpha_{11}\alpha_{21} + a_2\alpha_{21}^2$$

$$a_1' = a_0\alpha_{11}\alpha_{12} + a_1(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21}) + a_2\alpha_{21}\alpha_{22}$$

$$a_2' = a_0\alpha_{12}^2 + 2a_1\alpha_{12}\alpha_{22} + a_2\alpha_{22}^2$$

$$x_1 = \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2'$$
$$x_2 = \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2'$$

Als Beispiel einer Covariante:

$n = 2 \quad N = 1$

$$(a_0A_1 - a_1A_0)x_1 + (a_2A_0 - a_1A_1)x_2$$

$$A_0' = A_0\alpha_{11} + A_1\alpha_{21}$$

$$A_1' = A_0\alpha_{12} + A_1\alpha_{22}$$

~~Wollten wir nun~~ Nach Einführung der Begriffe der linearen invariante müssten wir nun der Reihe nach Eigenschaften ableiten, die dieselben ~~wohl~~ auch umgekehrt kennzeichnen. Aber es ist hier, wie es häufig und Verallgemeinerung in math. Betrachtungen zeigt. Ist nämlich erst einmal der verallgemeinerte Begriff zugrunde gelegt, so genügt die geringste Modifikation oder auch nur eine veränderte Deutung der Formeln, um alle Betrachtungen auch auf

den allgemeinen Fall beziehen zu können. Es ist
etwas möglich, wo ich überzeugt war, dasselbe auch
zugleich ~~von dem~~ dass wir die Verallgemeinerung
in richtiger Sinne vorgenommen haben.

Wir wollen nun die früher für die gleichzeitige Invariante und Covariante gefundenen
Sätze (in §4-7) der Reihe nach durchsehen und nur
überlegen x), welche Modifikationen anzubringen sind.

Gleich ~~zu allererst~~ bei Ableitung der ersten Eigenschaft gelangte wir zum ~~Begriff~~ Begriffe der Gewichte, Um nun diesen Begriff für die Simultaninvariante zu entwickeln, müssen
wir jene Betrachtung in ~~Bezug~~ der entsprechend modifizierten
Gestalt wiederholen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varkappa x_1' \\ x_2 &= \lambda x_2' \end{aligned}\right\} \Delta = \varkappa\lambda$$

$$\left.\begin{array}{l|l} a_0' = \varkappa^n a_0 & A_0' = \varkappa^N A_0 \\ a_1' = \varkappa^{n-1}\lambda a_1 & A_1' = \varkappa^{N-1}\lambda A_1 \\ \cdots & \cdots \\ a_n' = \lambda^n a_n & A_N' = \lambda^N A_N \end{array}\right\} \quad J = \sum \nu_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n N_0 N_1 \ldots N_N} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \ldots a_n^{\nu_n} A_0^{N_0} A_1^{N_1} \ldots A_N^{N_N}$$

$$\mathfrak{J}' = \sum \sum_{\nu_0 .. N_0} a_0^{\nu_0} .. A_0^{N_0} .. \kappa^{n\nu_0} \kappa^{(n-1)\nu_1} \lambda^{\nu_1} .. \kappa^{\mathcal{N} N_0} \kappa^{(\mathcal{N}-1) N_1} \lambda^{N_1} ...$$

$$= (\kappa \lambda)^{p} \sum \sum_{\nu_0 .. N_0} a_0^{\nu_0} .. A_0^{N_0} ..$$

$$n\nu_0 + (n-1)\nu_1 + .. \quad + \mathcal{N} N_0 + (\mathcal{N}-1) N_1 + .. \quad = p$$

$$\nu_1 + 2\nu_2 + .. \quad + N_1 + 2N_2 .. = p$$

$$n(\nu_0 + \nu_1 + ..) \quad + \mathcal{N}(N_0 + N_1 + ..) = 2p$$

$$ng + \mathcal{N}G = 2p$$

Die zweite obere Gleichung definirt das Gewicht, die erste giebt die ~~die~~ zwischen den Gradzahlen herrschende Identität an. Wir erhalten also Resultat, die Invariante muss homogen, isobar sein und es existirt die Relation:

Math. Def.: der Simult. aufgestellt und dann angefangen mit Folgen [?] fort, die Eigenschaften derselben zu geben und abl. od. [?]

$$ng + \mathcal{N}G - 2p = 0$$

Das ist aber derselbe Satz wie in § 4 für die gewöhnliche Invariante, wenn wir nur folgende Modifikation vornehmen:

p bedeutet hier $\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + N_1 + 2N_2 + ..$

In der Relation ist an Stelle von ng zu schreiben $ng + \mathcal{N}G$.

Der ~~vorige~~ folgende Satz für die gewöhnliche Invariante lautet:

Jede Covariante ist eine Form etc.

Wir wollen nun den entsprechenden Satz ~~da~~ für die Simultkovariante dadurch ableiten, dass wir jene Modifikation einführen. Das heisst also jener Satz:

$$m = ng + Ng - 2p$$

Um ~~die folgende Eigenschaft~~ zur Differentialgleichung abzuleiten, hatten wir die Substitution

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1' + \mu x_2' \\ x_2' &= x_2' \end{aligned}\right| \quad \delta = 1$$

benutzt. Wir fanden damals:

$$a_0' = a_0$$
$$a_1' = a_0\mu + a_1$$
$$a_2' = a_0\mu^2 + 2a_1\mu + a_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{da_i'}{d\mu} = a_{i-1}'$$

$$A_0' = A_0$$
$$A_1' = A_0\mu + A_1$$
$$A_2' = A_0\mu^2 + 2A_1\mu + A_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dA_i'}{d\mu} = iA_{i-1}'$$

$$J(a_0 a_1 \dots a_n, A_0 A_1 \dots A_n) = J(\lambda a_0' a_1' \dots a_n', A_0 A_1' \dots A_n')$$

$$0 = \frac{d J(a_0' \dots a_n' A_0' \dots A_n')}{d\rho} = \frac{\partial J}{\partial a_0'}\frac{da_0'}{d\rho} + \dots \frac{\partial J}{\partial a_n'}\frac{\partial a_n'}{\partial \rho} + \frac{\partial J}{\partial A_0}\frac{\partial A_0}{\partial \rho}$$

$$0 = a_0 \frac{\partial J}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial J}{\partial a_2} + \dots n a_{n-1}\frac{\partial J}{\partial a_n} + A_0 \frac{\partial J}{\partial A_1} + 2A_1 \frac{\partial J}{\partial A_2} + \dots N A_{N-1}\frac{\partial J}{\partial A_N}$$

$$\Delta J = 0 \qquad \Delta = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + A_0 \frac{\partial}{\partial A_1} + 2A_1 \frac{\partial}{\partial A_2} + \dots$$

Die weitere Sätze werden wir einfach dadurch ableiten, dass wir an Stelle der früheren Δ den so verallgemeinerte einführen. ~~Und wir dann~~ Es gilt für eine Covariante die Differentialgl. $\Delta C' = x_2 \frac{\partial C'}{\partial x_1}$

Ferner: $\Delta = n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + N A_1 \frac{\partial}{\partial A_0} + (N-1) A_2 \frac{\partial}{\partial A_1} + \dots$

$$\Delta \mathfrak{J} = \Delta R \frac{C'}{x_2} = 0 \qquad \Delta C = \phi x_1 \frac{\partial C'}{\partial x_2}$$

Und nun ist die Vollständigkeit erreicht. Denn jede ganze rationale Funktion der a und A und x_1, x_2

jene Eigenschaft in der eben modificirten Weise] 107.

welche ~~alle oben abgeleitete~~ Eigenschaften besitzt ist eine [Symbolen] Covariante.

Der § 5 handelte von D und Δ und stellte Formeln auf, mittelst welcher wir das Bedingungssystem reducirten. Eine kurze Ueberlegung überzeugt uns, dass alle jene Formeln nach einer einfachen Modification auch für diese neuen Symbole gültig sind.

$F(a_0 \dots a_n)$ $\qquad$ $F'(A_0 \dots A_N)$

$$\{D_a\Delta_a - \Delta_a D_a\} F = (ng - 2p) F \qquad (D_A \Delta_A - \Delta_A D_A) F' = \{NG - 2P\} F'$$

$$\{D\Delta - \Delta D\} FF' = \{ng - 2p + NG - 2P\} FF' = \{ng + NG - 2p\} FF'$$

Alle Formeln für D, Δ gelten, wenn wir für $ng : ng + NG$ setzen. Daraus schliessen wir denn wieder, dass auch eine Reduction ~~der~~ Bedingungen in derselben Weise möglich ist wie früher. ~~Also bedeute~~ in § ~~7~~ 6. Da diese ~~Bedeutet~~ C_6 eine homogene isobare F. der Coeff. a – A

$D C_6 = 0$ $\qquad$ $m = ng + NG - 2p$

~~Satz~~

$C' = C_{x_1}^{m} + \dots$

genau wie für die gewöhnlichen Inv. nun mehr die ~~Mittel~~ einfachen Mittel zur wirklichen Aufst. von Simult. Invt, so machen wir's

Werfen wir noch einen Blick auf § 7. (laut) diese und gerade Invarianten, so gelten auch diese Sätze und wir haben:

Im ganzen merken wir uns also als Gesamtresultate der gegenwärtigen von den Simultanen Invarianten und Covarianten handelnden §:

Sämtliche Aufzählungen in § 4, ~~5~~ bis 7 sind wörtlich zu lassen sich wörtlich auf ~~Simultan~~ Bildungen invar. resp. covarianten übertragen, wenn man die Modifikationen vornimmt:

$$p = \cancel{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_q} + \cancel{N_1 + N_2 + \dots + N_{\nu}}$$

$$D = \pm D_a + D_A$$

$$\Delta = \Delta_a + \Delta_A$$

$$n_g : n_g + N_g$$

Bei dieser Anordnung sieht man auch, wie es bei mehr Formen $f, F, \overline{F}$ ist.
Im speziellen gilt der Satz zur Aufstellung von Simultan-bildungen dienende Satz, den wir uns explicite merken

Bedeutet C_0 eine homogene irrbare Funktion ~~der~~ ~~m~~ ~~A~~ von Grade g (in den a) G ~~und den~~ in den A, welche der Differentialgl.

$$DC_0 = \sum a \frac{\partial A}{\partial a} = 0$$

genügt, so ist

$$C = C_0 x_1^m + \frac{1}{1!} \Delta C_0 x_1^{m-1} x_2 + \frac{1}{2!} \Delta^2 C_0 x_1^{m-2} x_2^2 + \dots + \frac{1}{m!} \Delta^m C_0 x_2^m$$

eine (Simultan) Invariante vom ~~Grade~~ g Gesamtgrade $g + G$, dem Gewichte p und der Ordnung $n = ng + NG - 2p$. C_0 heißt die Quelle der Simultaninvariante.

Beispiel ($n = N = 3$) (eine Simultaninvariante)

$g = G = 1$, $p = 3$: $a_0 A_3 - 3 a_1 A_2 + 3 a_2 A_1 - a_3 A_0$

Hier gibt es ~~drei~~ verschiedene Invarianten zweiten Grades. Wir wollen dann nur systematischen Aufstellung der wichtigsten Simultaninvarianten und dabei ~~sind~~ ~~gleich~~ gleichzeitig einige Bemerkungen einschalten, welche sich uns aufdrängen.

Covariante als Beispiel einer Simultaninvariante.

Stimmt mit der Differentialgl.

$x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1 = b_0 x_1 + b_1 x_2$

also $x_1 = \alpha_2 = -b_1$

$x_2 = \alpha_1 = b_0$

§ 12 Simultaninvarianten zweiten Grades.

Ab. F. Wir haben in den letzten § den Begriff der Simultaninvariante festgelegt, in dem wir von 2 Grundformen ausgingen und eine Funktion beider Coefficienten eine mit der bekannten Invarianteneigenschaft eine Simultaninvariante nannten. Wir hatten dann alle Eigenschaften übertragen und schließlich den letzten wichtigen Satz mit den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt.

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} + \cdots$$
$$F = A_0 x_1^N + \binom{N}{1} A_1 x_1^{N-1} \cdots$$

Wir haben uns nach dem letzten Satze zunächst mit der Anelle zu befassen. Der einfachste Fall.

$$\left.\begin{matrix} q = 1 \\ \varphi = 1 \end{matrix}\right| p, \quad m = n + N - 2p$$

$$C_0 = a_0 A_p - \binom{p}{1} a_1 A_{p-1} + \binom{p}{2} a_2 A_{p-2} - + \cdots (-1)^p \binom{p}{p} a_p A_0$$
$$\Delta C_0 = 0$$
$$C_x = C_0 x_1^m + \Delta C_0 x_1^{m-1} x_2 + \cdots \frac{1}{m!} \Delta C_0 x_2^m = \varphi_p = (f, F)_p$$

Die p^{te} Ueberschiebung ist also die einfachste Covariante von Gewichte p nämlich die bilineare.

$(f,F)_1 = (f,F)$ = der jakobischen Covariante
= Funktionaldeterminante

Beispiel $n=2,\ N=1\quad p=1\quad m=1$

$(f,F)_1 = (a_0A_1 - a_1A_0)x_1 + (a_2A_0 - a_1A_1)x_2$

$(f,F)_p$ ist eine Invariante für $n+N = 2p$ höchstens gleich n
$\leqq n$
$\leqq N$ nur

Ist nun $n > N$ so höchstens $p = \frac{n+N}{2}$
$p > N$ was nicht

möglich ist, also nur
$n = N \leqq p$

Beispiel $n = N = p = 2$ und die obige Invariante $p=3$
Aber auch schon $n = N = 1$ ergiebt $a_0A_1 - a_1A_0$ unter einfachen
~~Aber auch schon $n = N = 1$ gesetzt unter einfachen~~
~~Funktionaldeterminante: $a_0A_1 - a_1A_0$~~ Das ist übrigens

die Quelle von früher und das führt zu der allgemeinen Bemerkung, dass jede Quelle auch eine solche für höhere Formen ist. $(f,f)_p = \frac{1}{2}(f,f)_p = 0$

Damals in § 9 vollständiges Formensystem in den Sinne der rationalen Ausdrückbarkeit. Covariante 2 Grades und 3 den Grades. Hier genügt 2 den Grades. Denn

Jede Simultancovariante der Grundformen f von der Ordnung n und F von der Ordnung $N \leqq n$ ist bis auf eine im Nenner

auftretenden Potenz von f als eine ganze rationale Function der Covarianten $f, f_2, f_3 \ldots f_n$ und der Simultan-covarianten $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_\nu$ darstellbar

Die Darstellung selbst erfolgt in der analogen Weise wie oben in § 9, wobei (dabei $A_0 = f$ gesetzt wird) wir für den dortigen Formeln für a_p noch die folgende für A_p hinzufügen:

$$A_p = \frac{1}{f}\Big(\psi_p + (\beta)_2 A_{p-2} + (\beta)_3 a_3 A_{p-3} \; \cancel{- (\beta)_p a_p A_0} \; + - \ldots - (-1)^p a_p A_0\Big)$$

Das Verständniss dieser Sätze ist wohl nicht schwer — erster Theil — weiter Theil. Auf den Beweis will ich nicht weiter eingehen, welcher derselbe genau wie oben ist, und wie jener auf dem Nehmen mit Quelle statt mit ganzen Covarianten. Ein Beispiel ~~wird~~ werden wir zudem in folgenden § kennen lernen,

§ 13 Systeme linearer und quadratischer Formen.

M. H. Wir hatten in §13 damit begonnen und fahren jetzt damit fort.

Wir wollen nun in vollständiger Weise diese simultanen Bildung aufstellen und tabellarisch ordnen:

g, G, m

$n=1\ N=1$	f_{101}	F_{011}	$\mathcal{F}_{110}$			
$n=2\ N=1$	f_{102}	F_{011}	$\mathcal{F}_{120}$	h_{200}	J_{111}	
$n=2\ N=2$	f_{102}	F_{012}	h_{200}	$\mathcal{H}_{020}$	Ψ_{110}	J_{112}
~~$n=3\ N=3$~~						

$f = a_0 x_1 + a_1 x_2$
$F = A_0 x_1 + A_1 x_2$

$\mathcal{F} = a_0 A_1 - a_1 A_0$

$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$
$F = A_0 x_1 + A_1 x_2$

$\nu = 2 a_0 A_1^2 + 2' a_1 A_1 A_0 + 2'' a_2 A_0^2$

$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1^2$
$F = A_0 x_1^2 + 2 A_1 x_1 x_2 + A_2 x_1^2$

$\Psi = (f, F)_2 = a_0 A_2 - 2 a_1 A_1 + a_2 A_0$

Ableitung von Relationen durch den obigen Satz.

$\nu = \frac{1}{f^n} \mathfrak{E} \mathfrak{N} F(f, F, h, \mathcal{F})$

$a_0 = f \quad A_0 = F$
$a_1 = 0 \quad A_1 = \frac{\mathcal{F}}{f}$
$a_2 = \frac{h}{f}$

$= f \frac{\Psi_1^2}{f^2} + \frac{h}{f} F^2 = \frac{1}{f}\left(\Psi_1^2 + h F^2\right) =$

$\mathcal{F}^2 = rf - h F^2$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{f^n}\, \mathfrak{G}^{N\dagger}(f, F, h, J, \psi) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_0 = f & A_0 = F \\ a_1 = 0 & A_1 = \frac{J}{f} \\ a_2 = \frac{h}{f} & \end{array} \right.$$

$$A_2 = \frac{1}{f}(\psi - a_2 A_0) = \frac{\psi}{f} - \frac{Fh}{f^2}$$

$$A_0 A_2 - A_1^2 = \mathfrak{H} = F\left(\frac{\psi}{f} - \frac{Fh}{f^2}\right) - \frac{J^2}{f^2} = \frac{1}{f^2}\left(fF\psi - F^2 h - J^2\right)$$

$$J^2 = fF\psi - f^2 \mathfrak{H} - F^2 h$$

~~Jede~~ Als Anhang dieses § der speciellen Anwendungen der Satz:

~~Jede~~ Die Resultante zweier Formen ist eine Simultaninvariante resp. von den Graden $g = N$, $\mathfrak{g} = n$

Repraesentirt nur ein Bedingung: $F(\alpha_1)\, F(\alpha_2) \ldots = 0$ $\left| \begin{array}{l} g = N \\ \mathfrak{g} = n \end{array}\right.$

Beweis aus der Definitions-gleichung

1.) $n = 1$, $N = 1$ Result. $= J$

2.) $n = 2$ $N = 1$ $= r$

3.) $n = 2$ $N = 2$ Res $=$ ~~[illegible]~~ $+ \psi^2 - 4h\mathfrak{H}$

~~[illegible]~~ Also homogen und isobar, $g = N$, $\mathfrak{g} = n$, $p = nN$

Durch Elimination finden und die Zahlen bestätigt erkennen.

Result. in 3.) $= 4(a_1 A_0 - a_0 A_1)(a_1 A_2 - A_1 a_2) + (a_0 A_2 - A_0 a_2)^2$

Es scheint hier am Platze zu sein, ein allgemeineres Beispiel einer Simultaninvariante zu geben, welches zugleich den Begriff der Covariante in neuem Lichte erscheinen lässt. f, $F(N=1)$ $\delta A_0 = \alpha_{22} A_0' - \alpha_{21} A_1'$, $\delta A_1 = -\alpha_{12} A_0' + \alpha_{11} A_1'$

$A_1' = \mathfrak{f}_1'$, $A_0' = -\mathfrak{f}_2'$ Dann wird $A_1 = \frac{1}{\delta} \mathfrak{f}_1$, $A_0 = -\frac{1}{\delta} \mathfrak{f}_2$ d.h. Jede Simultaninv. ist Covariante und umgekehrt

§ 14 Covarianten von Covarianten

Wir kommen jetzt zu den § 14, welcher sich mit einer bemerkenswerten und folgereichen Eigenschaft der Covariantenbegriffe beschäftigt. Da wir der Covariante die notwendige Eigenschaft als Form zu betrachten und auch äußerlich diesen Umstand durch die Schreibweise zum Ausdruck gebracht hatten, so liegt es nahe diese als Grundform zu betrachten und neue invariante Bildungen abzuleiten.

$$f = a_0 x_1^n$$

$$C = C_0 x_1^m + \binom{n}{1}$$

$$T = T_0 x_1^\mu + \ldots \qquad T_{0(1)} = \mathfrak{H}(C_0, C_1, \ldots C_m) = \mathfrak{H}(a_0 a_1 \ldots a_n)$$

Das gleiche gilt für simultane Bildungen.

Satz: Im Hinblick auf diese vorbereitenden Ueberlegungen gilt der Satz. Invarianten resp. Covarianten sowie simultane Invarianten resp. Covarianten von Covarianten oder simultanen Systemen derselben sind selbst wiederum Invarianten resp. Covarianten.

Wir wollen der Anschaulichkeit halber zunächst jenen einfachsten Fall beweisen.

über der Invariante eigenschaft folgt.

$f = a_0 x_1^n + \cdots$

$C = C_0 x_1^m + \cdots$

$T = T_0 x_1^\mu + \cdots$

$C_{(a_0 a_1 \ldots a_n)} = \frac{1}{\sigma^p} C(a_0' a_1' \ldots a_n' x_1' x_2')$

$T_{(C_0 C_1 \ldots C_\mu)(x_1 x_2)} = \frac{1}{\sigma^\pi} T(C_0' C_1' \ldots C_\mu' x_1' x_2')$

$T(C_0 C_1 \ldots C_\mu x_1 x_2) = \Theta(a_0 \ldots a_n x_1 x_2)$

Um unsere Sätze zu beweisen müssen wir untersuchen, wie sich unser T als Funktion von $a_0 a_1 \ldots a_n$ verhält. Vertauschen wir a mit a'

$T(C_0' \ldots C_\mu' x_1' x_2') = \sigma^{M} \Theta(a_0' \ldots a_n' x_1' x_2')$

$T(C_0' \ldots C_\mu' x_1' x_2') = T(a_0' \ldots a_n' x_1' x_2') = \Theta_{(a x)}$

$= \sigma^{N} T(a_0 C_1 \ldots x_1 x_2) = \Theta_{(a x)}$

$\Theta(a_0' a_1' x_1' x_2') = \sigma^{N} \Theta(a_0 \ldots a_n x_1 x_2)$

q. e. d.

Ebenso für simultane Bildungen:

f, Φ

C, C'

T'

Bis auf Potenzen der Substitutions-determinante ist:

$C(a_0 a_1 \ldots A_0 A_1 \ldots x_1 x_2) = \sigma^{M} C(a_0' a_1' \ldots A_0' A_1' \ldots x_1' x_2')$

$C(\quad) = \sigma^{M} C(\quad)$

$T' = T'$

$T_{(\Phi \ldots C_{\mu'} \ldots)(x_1 x_2)} = T_{(a_0 a_1 \ldots A_0 A_1 \ldots x_1 x_2)}$

Die oben besiesene Eigenschaft der Covarianten, können wir die Gruppeneigenschaft der Covarianten. begriffer nennen analog wie wir die Gruppeneigenschaft der lineare Transformation die Klasse nannten, sich also solche zu reproduzieren. Der Gruppenbegriff ist der überhaupt, welche die Mathematik einen meisten Wesen nach besitzt und die Gruppeneigenschaft der meisten, wichtigsten verstellten und bedeutendsten Begriff ist. Z. B. rationale Funktion algebraische Funktion, Funktion überhaupt.

Beispiele: A Invariante von Covariante. A.

H von H = d für die cubische Form.

B Jakobische von H und f für cubische = $T = 2(f,h)_1$

Die 4te Ueberschiebung von Hess für die biquadratische Form $= j = \frac{1}{6}(f,h)_4$

C. Jakobische von $(f,T)_1$ und $T = r$ für $n = 2$, $N = 1$

D. H von $(f,f)_4$ für die Form 5ter Ordng.

$$A = (a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3)^2 - 4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)(a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2)$$

d hat die Zahlencoefficienten: $d = a_0^2 a_3^2 - 3a_1^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_2 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3$

$$= a_0^2 a_5^2 - 10 a_0 a_1 a_4 a_5 + 4 a_0 a_2 a_3 a_5 \;\cancel{+ 16\, a_0 a_2 a_4^2 - 12\, a_0 a_3^2 a_4 + 16\, a_1 a_3^2 a_5}$$

$$\cancel{+ 9 a_1^2 a_4^2 - 12 a_1 a_2} \qquad + \ldots \qquad - 32\, a_2^2 a_3^2 .$$

hat 12 Glieder und ist die einfachste Invariante der binären Grundform 5ter Ordnung.

Der Satz „Jede genannte Funktion von Covar. ist Covariante" ist ein specieller Fall dieser Anwendung auf den Satz, daß in einer Invariante die Summe der Zahlencoefficienten = 0 ist.

Wir schliessen diesen § noch einige Ausführungen ~~..~~ an, welche ~~...~~ begrifflich von Bedeutung ~~sind~~ und der Vollständigkeit halber nothwendig sind, wenngleich sie ~~uns für den Augenblick nicht wesentlich von Interesse erscheinen~~ [die Anwendungen] nicht fruchtbar erscheinen, wie die früheren.

Zunächst den Begriff der Polare entwickeln und zeigen wie wir dazu geführt werden.

$$f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2) = f(x_1, x_2) + \left[\frac{\partial f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda = 0} \lambda +$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)}{\partial \lambda^2}\right]_{\lambda = 0} \lambda^2 + \ldots$$

Diese Coefficienten nennen wir Polaren und schreiben die k te Polare

$$\mathfrak{P}_y^k = \left[\frac{\partial^k f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)}{\partial \lambda^k}\right]_{\lambda = 0}$$

Wir wollen sehen, wie wir die Polaren ~~f~~ zerlegen bilden.

$$\mathfrak{P}_y = \left[\frac{\partial f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda = 0}$$

$$\frac{\partial f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)}{\partial \lambda} = \frac{\partial f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)}{\partial (x_1 + \lambda y_1)} \cdot y_1 + \frac{\partial f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2)}{\partial \lambda} \cdot y_2$$

$$\mathfrak{P}_y = y_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

$$\mathfrak{P}_y^r = \mathfrak{P}_y \mathfrak{P}_y \ldots$$

Also die ~~D~~ te Polare ~~f~~ bezüglich oder nach y ist von $n$ten Grade in y und von $n-n$ ten Grade in x und es gilt die Entwicklung:

$$f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2) = f^x + \mathfrak{P}_y \lambda + \frac{1}{2!} \mathfrak{P}_y^2 + \ldots$$

Man kann auch von Covarianten Polaren bilden.

~~Def~~ Satz: (von Covarianten)

Die Polaren besitzen die Invarianteneigenschaft ~~in~~ dem Sinne, sobald ~~auch~~ gleichzeitig die zweite Variabelreihe ~~auf dieselb~~ y_1, y_2 derselben linearen Transformation unterworfen wird die Variabeln x_1, x_2.

Natürlich auch die Polaren der Form

$$C(a_0 a_1 \dots x_1 x_2) = \frac{1}{\delta p} C(a_0' a_1' \dots x_1' x_2')$$

Ich setze für x_1' : $x_1' + \lambda y_1'$

x_2' : $x_2' + \lambda y_2'$

$$C(a_0 a_1 \dots x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2) = \frac{1}{\delta p} C(a_0' \dots a_n', x_1' + \lambda y_1', x_2' + \lambda y_2')$$

$$x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' \qquad y_1 = \alpha_{11} y_1' + \alpha_{12} y_2'$$

$$x_2 = \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' \qquad y_2 = \alpha_{21} y_1' + \alpha_{22} y_2'$$

$$x_1 + \lambda y_1 = \alpha_{11}(x_1' + \lambda y_1') + \alpha_{12}(x_2' + \lambda y_2')$$

$$x_2 + \lambda y_2 = \alpha_{21}(x_1' + \lambda y_1') + \alpha_{22}(x_2' + \lambda y_2')$$

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} C(a_0 a_1 \dots x_1 x_2 y_1 y_2) = \frac{1}{\delta p} \frac{\partial^n}{\partial y_1'^n} C(a_0' a_1' \dots x_1' x_2' y_1' y_2')$$

Natürlich sind auch die Polaren der Form selber Covariante in dem erweiterten Sinne. Ich erwähne, dass hier wichtig sind der Polarenbegriff und der erweiterte Begriff der Invariante.

Die Folgerung, die ich jetzt ziehe, ~~haben keine bedeutende~~ wesentliche Tragweite ~~und sollen sie erster Linie dem dienen~~ werden uns Gelegenheit geben, unsere Begriffe ~~Kovariante~~ geläufig zu machen.

Satz Invarianten von Polaren sind Covarianten der Grundform.

Denn die Polaren sind nach dem letzten Satze Covarianten

Beispiel. die Hessische Invariante der weiten Polare einer cubischen Form ist die Hessische Covariante der selben.

Allgemein bilden wir die quadratische Invariante der $i$ten Polare von f:

$$\left(\frac{\partial^i f}{\partial x_1^i}\frac{\partial^i f}{\partial x_2^i}\right)_2 = \frac{\partial^i f}{\partial x_1^i}\frac{\partial^i f}{\partial x_2^i} - \binom{i}{1}\frac{\partial^i f}{\partial x_1^{i-1}\partial x_2}\frac{\partial^i f}{\partial x_1\partial x_2^{i-1}} + \cdots + (-1)^{\frac{i}{2}}\binom{i}{\frac{i}{2}}\left(\frac{\partial^{\frac{i}{2}} f}{\partial x_1^{\frac{i}{2}}\partial x_2^{\frac{i}{2}}}\right)^2$$

Wir haben damit

$$= a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \cdots + (-1)^{\frac{i}{2}}\binom{i}{\frac{i}{2}} a_{\frac{i}{2}}^2$$

Ich habe das letztere etwas übereilt, um zu einem Abschluss zu kommen. Nach Weihnachten. Rücksicht auf §9–14. und ~~Ende~~ im Laufe der weiten Theile der Semesters werde ich gewiß einen Einblick erhalten. Es darf nicht befremden, daß wir uns speciell bei der binären Invariantentheorie so lange aufhalten. Denn später leicht zu übertragen.

~~Ende~~ H. Den von den Ferien in Aussicht genommenen Rückblick auf die bisherige Ergebnisse möchte ich heute noch nicht vornehmen, sondern mir für später vorbehalten, in dem ich glaube, daß eine solche zusammenhängende Uebersicht über die Ideen der binären Invariantentheorie dann am nützlichsten sein wird, wenn wir zu deren Verallgemeinerung auf höhere Gebiete schreiten. Für jetzt haben wir uns aber noch mit der binären Formentheorie zu beschäftigen. Nur, um Anschluss zu gewinne, darf ich mir erlauben, an die letzt besprochenen Sätze zu erinnern.

Wir wollten die ersten 9 §§ als den Grundstock betrachten für den ganzen weiteren Aufbau der Invariantentheorie (Begriff, Eigenschaften, Aufstellung der Invarianten) und stellten uns demnach die Aufgabe, bei diesem Aufbau damit zu beginnen, indem wir die gefundenen Begriffe, Methoden und Resultate zu verallgemeinern suchten und führten diese Verallgemeinerung nach zwei Richtungen hin aus:

1.) Simultane Grundformen und Invarianten:

$$(a_0 a_1 \dots a_n)^n (A_0 A_1 \dots A_n)^n (x_1 \dots x_n)^n = \frac{1}{\delta p} (a' A' x, \xi)$$

2.) Mehrer Variabelnreihen:

$$(a_x)^n (A_x)^n (x, y) = \frac{1}{\delta p} (a' A' x' y')$$

Vereinfachung der Polarenform S. 129
Allgemeine Theorie der Covarianten S. 134

Allerdings nur ein Beispiel solcher Covarianten nämlich die Polare. Ihre Bildung und invariante Natur.

In dem wir diese Verallgemeinerungen annahmen konnte es nicht fehlen, dass

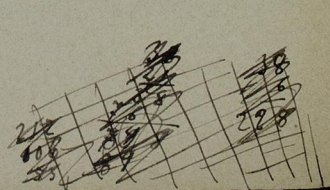
sich nun von selbst neue Anforderungen und ~~Gesetzlichkeiten~~ Theoreme aufdrängten, und ich erinnere nur an die in letzten § besprochene sogenannten Gruppeneigenschaft der Covarianten, wonach jede Covariante oder Simultancovariante von Covarianten wiederum eine Covariante der Grundform wird. Wir haben diesen Satz bereits einmal angewandt, aber nur auf bekanntes und da Neues zu finden erst der Prüfstein einer ~~Theorie sein~~ Sätze für die Fruchtbarkeit eines Satzes sein kann, so in folgenden kurzen Paragraphen

§ 15. Die Invarianten der Form 5ten und 6ter Ordnung.

1) $f = a_0 x_1^5 + 5 a_1 x_1^4 x_2 + \cdots a_5 x_2^5$

~~$f = 4, f = 10 : A =$~~

Wir bilden die beiden Covarianten



$i = (f,f)_4 = (a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) x_1^2 + \dots$

$j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} x_1^3 + \dots$

1.) A = Diskr. von i $g = 4$, $p = 10$ 12 Glieder.

Es ist die einfachste Invariante, welche existirt.

2.) Δ = Diskr. von f $g = 8$ $p = 20$ 59 Gliedern

3.) B = Diskr. von j $g = 12$ $p = 30$ 228 Glied.

4.) R = Resultante von f und j: $g = 18$ $p = 45$ 848 Gl.

Alle sind von Cayley und Sylvester ausgerechnet.

Damit sind die Invarianten erschöpft, aber es ist von prinzipieller Bedeutung dass zwischen diesen eine Relation besteht, deren Gestalt sich auch sofort aufstellen lässt. Denn alle geraden Invarianten Π sind

$\Pi = R(A, B, \Delta)$

Die Existenz und die Darstellung dieser Relation ist von Hermite gegeben und zwar in folgender Weise:

$$f = x_1^5 + 10 a_2 x_1^3 x_2^2 + 5 a_4 x_1 x_2^4$$

$x_1 = x_1'$
$x_2 = -x_2'$ $\quad | \quad \delta = -1$

~~$a_0' = a_0$~~
$a_2' = a_2$
$a_4' = a_4$

$$J(a_0, a_2, a_4) = (-1)^5 J(a_0', a_2', a_4')$$
$$= -J(a_0, a_2, a_4)$$
$$J(a_0, a_2, a_4) = 0$$

Soll entw. und hinreichende Bedingung für die Transformirbarkeit in jene Gestalt

$A = \varphi(a_2, a_4)$
$\Delta = \psi(a_2, a_4)$
$\mathfrak{D} = \chi(a_2, a_4)$

d.h. $R(A, \mathfrak{D}, \Delta) = 0$

ist ebenfalls die entw. notwendige und auch hinreichende Bedingung dafür d.h. ~~Wenn nun~~ Führt man aber die Elimination aus, so ergiebt sich R von 36 Grade d.h.

$J^2 W^2 = R(A, \mathfrak{D}, \Delta)$

von einer leicht bestimmbaren Constanten abgesehen.

sehen.

Damit sind die auf die Invariante bezüglichen Fragen abgeschlossen. Von den Covariante erwähnte ich nur, dass ihrer im Ganzen 19 existiren d. h. zusammen = 23. Diese alle aufstellen zu wollen kann mir hier nicht einfallen, aber auf ihre Zahl und die zur ihrer Aufstellung zu verwendende Mittel kommen ich noch zurück.

Die Realitätsbedingung der Wurzel. d. Gl. 6. Grades durch Invariante ausgedrückt will

Ich kann mich nun für die Form 6ter Ordnung sehr kurz fassen, weil die Verhältnisse ganz analog sind und das einzig Interessante dabei eigentlich bloss darin besteht, dass man mit den Rechnungen noch durch dringen kann.

$$f = a_0 x_1^6 + \cdots$$

$$A = a_0 a_6 -$$

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}$$

$g = 2 \quad p = 6$

$g = 4 \quad p = 12$

$C = a_0^2 — + a_0$ $g = 6 \quad p = 18$

Δ = Diskrim. $g = 10 \quad p = 30$

E ~~xx~~ ist die einzig Ivarinte $g = 15 \quad p = 45$

und man findet sie wiederum als Bedingung dafür, daß

~~?~~ $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ ~~xx~~ wird.

Realitätsbedingungen noch nicht erledigt, aber eine folgende Aufgabe.
Ergänzt. 2.6 Form.
Wir wenden uns nach dieser Abschweifung wieder dem allgemeinen Standpunkte zu

§ 16 Die Combinanten

M. H. Nach der gestrigen Abschweifung, die ein Sonderfall behandelte, kehren wir zu einem allgemeinen Standp. Wir behandeln
Substituiren wir ~~in~~ einer ~~In~~ Invariante ~~xx~~ oder Covariante an Stelle ~~vo~~ von der Form f von $f + \lambda \varphi$ gebildet, so sind alle Coefficienten von λ invariante Gebilde:

$$f = a_0 x_1^n + \ldots$$
$$\varphi = A_0 x_1^n + \ldots$$
$$f + \lambda\varphi = (a_0 + \lambda A_0) x_1^n + \ldots$$

$$C(a\, x) = \frac{1}{\delta}\left(C(a' x')\right)$$
$$C(a + \lambda A\, x) = \frac{1}{\delta}\left(C(a' + \lambda A', x')\right)$$

Also ganz ähnlich, wie die invariante Natur der Polaren nachgewiesen wurde.

Daher muss auch für Coefficienten nach der Entwickelung die Definitionsgleichung der Invariante erfüllt sein. Es ist aber:

$$\frac{\partial C'}{\partial \lambda} = \alpha_0 \frac{\partial C}{\partial a_0} + \alpha_1 \frac{\partial C}{\partial a_1} + \alpha_2 \frac{\partial C}{\partial a_2} + \cdots$$

d. h. wir erhalten aus irgend einer ganzlichen Invariante oder Covariante eine simultane, wenn wir jener Symbol anwenden. Beispiel.

$$(\varphi, \varphi)_p = (a_0 a_p - (p) a_1 a_{p-1} + (2) a_2 a_{p-2} - + \cdots) x_1^{m+n}$$

$$(\varphi, \psi)_p = (\alpha_0 a_p - (p) \alpha_1 a_{p-1} + \alpha_2 a_{p-2} - + \cdots - (p) a_1 \alpha_{p-1} + a_0 \alpha_p) x_1^{m+n}$$

$$2(\varphi, \varphi)_p = \alpha_0 \alpha_p - (p) \alpha_1 \alpha_{p-1}$$

Es geschieht nun im Anschluss an
Es liegt ganz im Bereich dieser Betrachtungen, wenn wir hier einer speciellen Sorte von simultanen Bildungen gedenken nämlich der sogenannten Combinanten:

Eine Combinante ist eine solche simultane ~~Covar~~ Invariante oder Covariante zweier Formen von gleicher Ordnung, welche wesentlich ungeändert bleibt, wenn wir für jene Formen je eine lineare Combination derselben einsetzen.

d. h. ~~Jener Symbol sollte die invariante Eigenschaft~~

wenn wir

$$C(a, \dots x) = C(a + \lambda \alpha, \alpha + \mu a, x)$$

Also $\frac{\partial C}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial C}{\partial \mu}$ müssen verschwinden

$$\alpha_0 \frac{\partial C}{\partial a_0} + \alpha_1 \frac{\partial C}{\partial a_1} + \dots = 0$$

$$a_0 \frac{\partial C}{\partial \alpha_0} + a_1 \frac{\partial C}{\partial \alpha_1} + \dots = 0$$

Differentialgleichungen der Combinanten. Wir hatten früher gesehen, dass dieses Differentialsymbol die invariante Eigenschaft nicht ändert. Ist das Resultat identisch gleich Null, so haben wir es mit einer Combinante zu thun. Die Combinante ist dem Inbegriff aller Formen der Discriminante

$$f + \lambda F$$

eigenthümlich. Beispiel bietet die ungerade Ueberschiebung

$$(f, F)_p$$

wie man direkt sieht:

$$(f + \lambda F, F + \mu f)_p = (f, F)_p + \lambda (f, f)_p + \mu (F, F)_p - \lambda \mu (f, F)_p$$

$= (\mu - \lambda)(f,F)_\mu$

aber wir können die Combinanten Eigenschaft auch mittelst der Differenzen bezüglich ableiten, wie:

$$(f,F)_\mu = \alpha_0\alpha_\mu - (\mu,1)\alpha_1\alpha_{\mu-1} + (\mu,2)\alpha_2\alpha_{\mu-2} - \dots$$

$$\frac{\partial C}{\partial a_0} = \alpha_0\alpha_\mu - (\mu,1)\alpha_1\alpha_{\mu-1} + (\mu,2)\alpha_2\alpha_{\mu-2} - \dots$$

$$a_0 A_\mu - (\mu,1) a_1 A_{\mu-1} + (\mu,2) a_2 A_{\mu-2} + \dots$$

$$A_0 \frac{\partial C}{\partial a_0} + A_1 \frac{\partial C}{\partial a_1} + \dots = 0$$

$$a_0 \frac{\partial C}{\partial A_0} + a_1 \frac{\partial C}{\partial A_1} + \dots = 0$$

Wir können aus diesem Beispiel eine merkwürdige Identität der Combinanten erkennen:

$$(f,F)_\mu = (A_\mu a_0 - a_\mu A_0) + (\mu,1)(A_{\mu-1}a_1 - a_{\mu-1}A_1) + \dots$$

$$(\mu,\mu) - (\mu,1)(1,\mu-1) + \dots (\iota,\kappa) = A_\iota a_\kappa - a_\iota A_\kappa$$

$$= (0,\mu) - (\mu,1)(1,\mu-1) + \dots \qquad a_\iota A_\kappa - A_\iota a_\kappa$$

Ich will nun zeigen, dass jede Combinante

ausschließlich von diesen Differenzen (i,k) abhängt:

$$C = \sum \lambda a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n} A_0^{\nu_0} A_1^{\nu_1} \dots A_n^{\nu_n}$$

$$a_i A_k - A_i a_k = (i,k) + \dots \qquad i > k$$

$$C = \sum \lambda \Pi(i,k)\, a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_h^{\nu_h} A_{h+1}^{\nu_{h+1}} \dots A_n^{\nu_n}$$

$$A_0 \frac{\partial C}{\partial a_0} + A_1 \frac{\partial C}{\partial a_1} + \dots = 0$$

$$C = \sum \lambda \Pi(i,k) \qquad \text{q. e. d.}$$

Auch umgekehrt, ist eine Simultaninvariante zweier Formen von gleicher Ordnung n nur von jenen Differenzen (i,k) abhängig, so ist sie eine Combinante. Denn

$$a_i : a_i + \lambda A_i$$
$$A_k : A_k + \mu a_k$$

$$a_i A_k - A_i a_k = (a_i + \lambda A_i)(A_k + \mu a_k) - (A_k + \lambda A_k)(A_i + \mu a_i)$$

Nehmen wir an, dass die Grade in Bezug auf die Coefficienten bei der Formenglied sind genügt eine Differentialgl. und die andere ist eine Folge der vorigen.

$= (1 - \lambda\mu)(a_i' A_{11} - A_i' a_{11})$

Wir haben beim obigen Beweise nur die eine Differentialgleichung benutzt und können daher schliessen, dass jede Simultan-covariante auch schon dann eine Combinante ist wenn sie einer Differentialgl. genügt. Die andere ist dann eine Folge jener.

Wir hatten als Beispiel einer Combinante die ungerade Ueberschiebung. Ich hebe speciell hervor:

Die erste Ueberschieb. $(f, F)_1 = (a_0 A_1 - a_1 A_0) x_1^{2n-2} + \ldots$

= Jacobische Covariante = Functional-Determinante = Functional-covariante ist eine Combinante.

Als weiteres Beispiel diene die Resultante.

$$\left.\begin{aligned} f &= 0 \\ F &= 0 \end{aligned}\right\} R = 0(f, F) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f + \lambda F \\ F + \mu f \end{aligned}\right\} R(f + \lambda F, F + \mu f) = 0$$

d.h. $R(f + \lambda F, (F + \mu f)$ ~~$= R(f, F)$~~

* Ub. H. Wir hatten das letzte Mal die Covariante als eine Cov.... definiert. Differentialgl. abgeleitet und erkannt, daß sie nur von den Differenzen (i, ii) abhängt. Dann auch umgekehrt ist leichts einzusehen.

Wir hatten früher die Resultante der Formen α 1ter und 2ter Ordnung aufgestellt.

$n = 1$

$R = a_0 A_1 - a_1 A_0$ ist * in der That eine Covariante nämlich als Determinante der beiden linearen Formen.

$n = 2$

$R = \psi^2 - 4 h H$ $\quad h = a_0 a_2 - a_1^2$

$H = A_0 A_2 - A_1^2$

$\psi = a_0 A_2 - 2 a_1 A_1 + a_2 A_0$

$\frac{1}{2} \psi h - 4 h \psi \equiv 0$ ist in der That gleich Null.

§ 17 Die Invarianten und Covarianten Gebilde als Functionen der Wurzeln

Wir werden nun in den nächsten 3 §§ mit verschiedenen Darstellungen der invariante Gebilde beschäftigen. Wir haben

schon häufig Beziehung genommen zu den in ihr vorgenommenen Schreibweise d.h. zur Theorie der Gleichungen mit einer Unbekannten. Also

$$f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots a_n$$

$$= a_0 (x - \omega_1)(x - \omega_2) \dots (x - \omega_n)$$

$$-\binom{n}{1} \frac{a_1}{a_0} = \Sigma \omega_i$$

$$+\binom{n}{2} \frac{a_2}{a_0} = \Sigma \omega_i \omega_k$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

und es liegt daher nahe covariante Invarianten und Covarianten als Funktionen gewisser Wurzeln zu betrachten, wobei dann $a_0 = 1$.

$$J = \Delta R(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n).$$

$$C = R(x, \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n, x)$$

Wir transformieren zu dem Zwecke die Grundform und sehen zu, welche Aenderung die Wurzeln erfahren:

$$f = (x_1 - \omega_1 x_2)(x_1 - \omega_2 x_2) \dots (x_1 - \omega_n x_2)$$

$$f' = \{\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' - \omega_1 (\alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2')\} \{\dots\} \dots \{\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' - \omega_n (\alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2')\}$$

$$= \prod \left(x_1' - \frac{\alpha_{22}\omega_1 - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \omega_1 \alpha_{21}} x_2' \right) \cdots \left(x_1' - \frac{\alpha_{22}\omega_n - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \omega_n \alpha_{21}} x_2' \right)$$
$$= \prod (x_1' - \omega_i' x_2') \quad \cdots (x_1' - \omega_n' x_2')$$

d. h. für ω_i ist zu setzen $\omega_i' = \dfrac{\alpha_{22}\omega_i - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \omega_i \alpha_{21}}$

Wie man solche Funktion, die hierbei ~~unge~~ wesentlich ungeändert bleiben, zu konstruieren hat, lehrt der folgende Satz:

Jede symmetrische Funktion der Wurzeldifferenzen $\omega_i - \omega_k$, ~~deren Glieder~~ jede einzelne Wurzel in gleichem Grade enthalten (z. B. eine Invariante), wenn ihre

Also:

$$J = \sum \prod (\omega_i - \omega_k) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{der Grad in den Diff.} = d \\ \text{---------} \quad w \end{array} \right.$$

$$J' = \sum \prod (\omega_i' - \omega_k') = \sum \prod \frac{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})(\omega_i - \omega_k)}{(\alpha_{11} - \omega_i \alpha_{21})(\alpha_{11} - \omega_k \alpha_{21})}$$

Also

$$= \frac{\Delta^d}{(\alpha_{11} - \omega_1 \alpha_{21}) \cdots (\alpha_{11} - \omega_n \alpha_{21})^w} \sum \prod (\omega_i - \omega_k)$$

$$= \frac{\Delta^d}{\pi^w} J$$

Damit ist die invariante Natur unseres Ausdruckes erwiesen, denn wir sehen, dass der transformierte Ausdruck den ursprünglichen wesentlich als Faktor enthält. Das Produkt π im Nenner rührt daher dass wir bei Wurzelpunkten in den ersten Coefficienten unberücksichtigt gelassen. Das selbe thut π. Die Function musste Ungerade sein, damit sich in den Coefficienten rational ausdrückt. Ueberdies:

$$d = p$$

$$\frac{nw}{2} = d \quad \text{d.h.} \quad w = g.$$

Als allgemeinerer Beispiel diene die Discriminante einer Grundform:

$$\text{Discrim} = \prod (\alpha_i - \alpha_k)^2 \qquad \text{(sind in der That gleich)}$$

$$w = 2(n-1) = g$$

$$d = n(n-1) = p$$

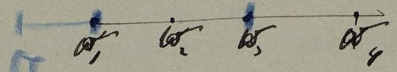
Ferner $n = 4$

$$\Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \qquad w = 2 \quad d = 4 \qquad \text{Syzygie} = (f, f)_4 = i$$

$\Pi\{(\omega_1-\omega_2)(\omega_3-\omega_4)-(\omega_2-\omega_3)(\omega_1-\omega_4)\}$ $\quad w=3,\ d=6,\ fg=j$

$j=0$ ist in der That auch die Bedingung für die harmonische Lage:

$$\frac{\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_2}}{\frac{\omega_4-\omega_1}{\omega_4-\omega_3}}=-1$$



d. h. $(\omega_1-\omega_2)(\omega_3-\omega_4)-(\omega_2-\omega_3)(\omega_1-\omega_4)$

~~Hierist das am Anfang der Seite stehende einzuschieben.~~

Die Uebertragung auf simultane Invarianten macht nicht leicht. Wir haben nur noch die Differenzen $\omega_i-\omega_k$ durch $\Omega_i-\Omega_k$ und $\omega_i-\Omega_k$ hinzuzufügen. Der Beweis bleibt derselbe, da die Transformation Ω dieselben sind.

Als allgemeinen Beispiel diene wieder die Resultante:

Resultante und $F=\Pi(\omega_i-\Omega_k)$ $\quad w=N=2$, $W=n=3$, $d=nN=p$

~~Beispiele~~

Ein anderes Beispiel ist:

$$(w_1 - x_1)(w_2 - x_2) + (w_2 - x_1)(w_1 - x_2) = a_0 A_2 - 2a_1 A_1 + a_2 b_0$$

Aber kann so allerdings beliebig viele Invarianten ohne weiteres angeben in Summ- oder Produktform. aber wenn man bedenkt, wie komplizirt und umständlich das Rechnen mit symmetrischen Wurzelfunktionen überhaupt ist, so erklärt es sich, warum der leuchtende Schein der Methode nicht zu einem erhellenden Strahl geworden ist. Aber hat mit der in der Rede stehenden Methode wenig angefangen vlg. Die Wurzelcriterien von Sylvester in der italienischen Zeitschrift den Annali di Mathematica. Bd, 1, 3.

Ich will aber noch kurz auf die Darstellung der Covarianten eingehen, was uns nun keine Schwierigkeiten mehr macht. ~~Mein~~ Satz:

Jede symmetrische Funktion der Differenzen $w_i - w_k$ und $x_e - w_i$ ist eine Covariante, wenn ihre Glieder jede einzelne Wurzel in gleichvielem Grade enthält.

Jene Transformation ist nämlich die inverse der angewandten daher transformiert sich die w' in w^x ebenso wie die Variable x' in x und der Divisor bleibt derselbe. Auch die charakteristischen Zahlen der Covariante lassen sich wieder bestimmen. Und ist der gemeinsame Grad w und sind die Wurzeldifferenzen d, so ist.

$$d = p \quad \text{und} \quad g = \quad , \quad m = wn - 2d = gn - 2p.$$

Beispiel die Form selbst: $p = 0 \quad g = 1$, $m = n$

Für simultane Formen kommen in Betracht die Differenzen:

$w_i - w_k$, $w_i - \Omega_k$, $\Omega_i - \Omega_k$, $x - w_i$ $x - \Omega_i$

vlg zunächst § 18.

§ 19. Die Invarianten und Covarianten als Funktion der einseitigen Differentialgrundformen.

Ich muss noch einer weiteren Darstellungs-

weise der Invarianten und Covarianten erwähnen, welche einmal principiell von Bedeutung ist und dann in den Anwendungen, wo es sich um die Berechnung von Invarianten und Covarianten specieller Formen handelt von Nutzen ist. Doch will ich die Darstellungsweise ohne Beweis in den folgenden Sätzen mittheilen:

Um eine Invariante oder Covariante der Grundform f als Function der einseitigen Differentialquotienten der letzteren darzustellen, setzen wir in der betreffenden Covariante an Stelle der Coefficienten $a_0, a_1 \ldots a_n$ die Ausdrücke $f_0, f_1, \ldots f_n$ ein, wobei in homogener Schreibweise allgemein die Bezeichnung

$$f_i = \frac{n-i!}{n!} \frac{d^i f}{dx^i}$$

gilt.

Ich habe den Satz nur für eine Grundform f ausgesprochen, aber man sieht leicht, wie er

III

143.

Dr. Hilbert

Colleg, Invariantentheorie

Rheras-Str. 10.

irrationalen Invariante

Anfang der §. 18 Die Begriffe der absoluten und der

Bevor wir zu den beiden noch übrig Darstellungsweisen übergehen, scheint es hier die geeignete Stelle dazu, um zwei neue aber naheliegende Begriffe der Invariantentheorie zu entwickeln, welche uns alsdann nach dem Früheren sehr leicht verständlich sein werden. Nämlich

1) Der Begriff der absoluten Invariante:

Allgemeine Grundform $f = a_0 x_1^n$

Die beiden Invarianten J_1 von Gewichte μ_1 und J_2 — μ_2

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von μ und μ' sei π und es sei

$\pi_1/\mu_1 =$ und $\pi_2/\mu_2 =$

Der Quotient

$$Q = \frac{J_1^{\pi_1}}{J_2^{\pi_2}} = \frac{J'^{\pi_1}}{J'^{\pi_2}}$$

d. h. der Quotient ist gar nicht mehr auch nicht von die Substitutionsdeterminante S. Ein solcher Quotient heißt daher eine absolute Invariante.

dben kann sie immer bilden, wenn zwei verschiedene gewöhnliche Invarianten vorliegen. Umgekehrt liegt nun eine absolute Invariante vor, wo wir leicht aus gewöhnlichen Invarianten zusammensetzen, indem wir Zähler und Nenner für sich herauswählen. Bestimmen wir übrigen den Grad in Zähler und Nenner so finden wir

$$\begin{array}{l|l} ng_1 - 2p_1 = 0 & \pi_2 \\ ng_2 - 2p_2 = 0 & \pi_1 \\ \hline n(g_1\pi_2 - g_2\pi_1) = 0 & \end{array}$$

d. h. $g_1\pi_2 = g_2\pi_1$, wie es auch leicht direkt zu sehen ist.

Beispiele Die quadratische und cubische Form besitzen keine absolute Invariante. Die biquadratische nur eine: $\frac{i^3}{j^2}$. Die Form 5ter Ordn. z. B. $\frac{A^2}{D}$ u. s. w.

Wir sind zu diesem Begriffe gelangt, indem wir die Eigenschaft der ganzen Funktion aufgaben. Geben wir statt dessen die Erforderniss der Rationalität auf, so gelangen wir zu dem Begriff der irrationalen Invariante, Die

allgemeine Definition als Wurzel einer Gleichung, (höchster Coefficient 1 und den rest) deren Coefficienten rationale Invariante ~~mit arithmetisch zu wählende Gewichte sind~~ von den Gewichten p, $2p$ ... sind.

Also:

$$\lambda^r + \mathfrak{J}_p \lambda^{r-1} + \mathfrak{J}_{2p} \lambda^{r-2} + \dots \mathfrak{J} + \mathfrak{J}_{rp} = 0$$

$\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_r$ sind irrationale Invariante.

Beweis:

$$\lambda'^r + \mathfrak{J} \delta^p \lambda'^{r-1} + \mathfrak{J}_{2p} \delta^{2p} \lambda'^{r-2} + \dots \mathfrak{J}_{rp} \delta^{rp} = 0$$

$\lambda'_0 = \delta^0 \lambda_0$, $\lambda'_1 = \delta^p \lambda_1$, ... $\lambda'_r = \delta^{rp} \lambda_r$ q.e.d.

~~Wenn~~ So wie wir aber von den abs. Invarianten ~~zu~~ den, so können wir auch hier von den irrationalen Invarianten zu den gewöhnlichen Invarianten zurückkehren. Denn

$$\mathfrak{J} \lambda_0 + \lambda_1 + \dots \lambda_r = - \mathfrak{J}_p$$

$$\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \lambda_2 + \dots = + \mathfrak{J}_{2p}$$

Beispiel haben wir früher bei der Discussion der

bigradratischen Form in §10. Wir legten da der Diskussion zu Grunde die Gleichung:

$$\Delta^3 - i\Delta - 2j = 0 \quad , \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \qquad \frac{p=1}{J_1 = 0 \; J_2 = -i \; J_3 = -j}$$

$\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$

Auf ein anderes allgemeineres Beispiel werden wir geführt, wenn wir die Darstellung von Invarianten ~~dass~~ im vorigen § benutzen. Dieselbe bestand in folgendem:

Lassen wir nun die Forderung der Symmetrie weg, so bleibt die invariante Natur erhalten, aber der Ausdruck wird irrational. Nennen wir ihn Δ_0 und alle daraus ~~hervorgehenden~~ durch $\mathfrak{S}$ Vertauschung der Wurzeln hervorgehenden ~~mit~~ $\Delta_1, \Delta_2 \ldots$ so sind $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2 \ldots$ ein zusammengehöriges System irrationaler Invarianten. So zum Beispiel:

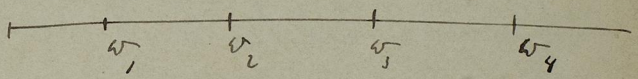
$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2, \; (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_4)^2, \; (\alpha_1 - \alpha_4)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2$$

woraus sich dann wieder jene Gleichung mit ganzen invarianten (resp. ganzen konstanten) Coefficienten construiren lässt. Da jene Coefficienten $J_1, J_2 \ldots$ $\mathfrak{S}$ ganze sind, so sind die Wurzeln jener Gleichung speciell ganze irrationale ~~Functionen~~.

~~diesen~~ Invarianten. Ebenso hatten wir bei den Beispielen ganze ~~irrat.~~ Funktionen der Wurzeldifferenzen im Auge. Man kann endlich beide Gesichtspunkte verbinden und gebrochene irrationale Invarianten construieren. Ich möchte ~~XXXX~~ für diesen mich jedoch auf die Behandlung eines speziellen Beispieles beschränken:

Wir legen eine ~~X~~ Form 4ter Ordnung zu Grunde und construieren ihre 4 Wurzelpunkte. Wir haben schon früher das Doppelverhältnis dieser 4 Punkte

construiert:



$$\frac{\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_2}}{\frac{\omega_4-\omega_1}{\omega_4-\omega_3}} = \frac{(\omega_2-\omega_1)(\omega_4-\omega_3)}{(\omega_3-\omega_4)(\omega_4-\omega_1)} = \frac{(\omega_1-\omega_2)(\omega_3-\omega_4)}{(\omega_1-\omega_4)(\omega_2-\omega_3)}$$

Dasselbe ist eine absolute irrationale Invariante. ~~XXXXXXXXXX~~ Begründung: Um nun das ganze zugehörige System zu finden haben wir alle 4! Wurzelvertauschungen vorzunehmen $4! = 24$. Diese Zahl reduziert sich, weil wir z.B. ω_1 festhalten können auf $3! = 6$. Die Vertau-

Nr. 11. In grz. § hatten wir zwei neue Begriffe — anfgestellt. Verwirklicht wir möglich 1.) — 2.) Wir konnten beider Gesichtspunkte combinieren und von abs. inv. Invarianten sprechen. Das wichtigste und brauchbarste Beispiel hiefür ist das Doppelverhältniss.

Setzungen sind:

$$\lambda = \frac{(w_1-w_2)(w_4-w_3)}{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}, \quad \frac{(w_1-w_2)(w_4-w_3)}{(w_1-w_3)(w_4-w_2)}, \quad \frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}, \quad \frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)}$$

$\lambda_1 = \lambda$

$\lambda_2 = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ $\quad \lambda_3 = 1-\lambda$ $\quad \lambda_4 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$

$$\frac{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}, \quad \frac{(w_1-w_4)(w_3-w_2)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)}.$$

$\lambda_5 = \frac{1}{\lambda-1}$, $\quad \lambda_6 = \frac{1}{\lambda}$

Das sind die 6 Werte, welche das Doppelverhältniss von 4 Punkten annimt. Wir wollen nun aber Beziehung gewinnen zu unserer Grundform 4ter Ordnung und deren Invarianten. Dasselbe geschieht wenn wir die Gleichung

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_6)$$

bilden, deren Coefficienten als elementarsymmetrische Functionen nunmehr absolute Irrationale Invarianten der bi-

quadratischen Grundform sein werden, und da wir nur eine solche nämlich

$\alpha = \frac{i^3}{j^2}$ haben, so werden sie von dieser allein abhängen. Um diese etwas umständliche Rechnung zu vermeiden, wollen wir jedoch so verfahren, dass wir direkt α durch λ ausdrücken und zwar wie folgt: Wir setzen an

$$\alpha = \frac{G_{1,\lambda}}{G_{0,\lambda}}$$

Wir benutzen die Ausdrücke:

$$i = \sum (\omega_1 - \omega_2)^2 (\omega_3 - \omega_4)^2 \qquad j = \sum (\omega_1 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)(\omega_2 - \omega_3)(\omega_1 - \omega_4)$$

$\omega_1 - 3\ 4\ 2 \qquad 3\ 4\ 1\ 2$
$\quad 4\ 2\ 3 \qquad 4\ 2\ 1\ 3$

$$\frac{i}{(\omega_1-\omega_4)^2(\omega_2-\omega_3)^2} = \lambda^2 + (1 \pm \lambda)^2 + 1 = 2(\lambda^2 \pm \lambda + 1)$$

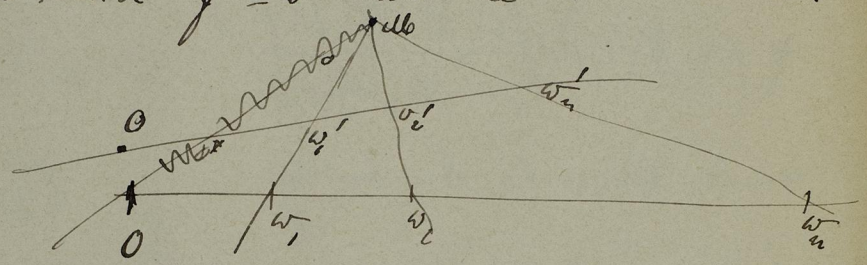
$$\frac{j}{(\omega_1-\omega_4)^3(\omega_2-\omega_3)^3} = \left(\frac{-\lambda}{\lambda} - 1\right)\left(-(1+\lambda)\cdot\lambda + \lambda\right)\left(1 \cdot \lambda + (1 \pm \lambda)\right) = (1+\lambda)(2\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$\frac{i^3}{j^2} = Z \frac{2(1-\lambda+\lambda^2)^3}{(1+\lambda)^2(2-\lambda)^2(1-2\lambda)^2}$$

Zur Bestimmung der (vorläufigen) Z setze: $J = x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + x_2^4$: $i = +3$, $j = -1$
$3^3 = \frac{Z}{1^2}$ $Z = 4 \cdot 27$.

Bestätigung für die harmonische Lage $\lambda = -1$.

Ich füge endlich noch eine kurze Bemerkung über die geometrische Interpretation der binären Form und ~~über~~ den linearen Transformationen hinzu: Die ~~Deutung~~ Deutung einer binäre Form auf einer Geraden haben wir ja nur eben berührt: Wir gehen nun zu einem zweiten Beispiel über und $f = 0$ habe die n Wurzeln:



~~Wir~~ und es ist daher nun noch nöthig den Begriff der linearen Transformation zum geometrischen Ausdrucke zu bringen. Zu dem Zwecke construiren wir wie oben ein ~~Formen~~ Strahlenbüschel, welches aus allen Strahlen durch einen Punkt geht. Wir nehmen nun irgend einen Nullpunkt an und legen eine Gerade und ~~zeichnen~~ construiren $\omega_1' \omega_2' \ldots \omega_n'$. Bilden wir nun

$$f' = (x' - \omega_1')(x' - \omega_2') \ldots (x' - \omega_n')$$

so behaupte ich, dass dieser eine Form ist, welche aus der ursprünglichen Form durch eine lineare Transformation hervorgeht. Der Nachweis ist in der That direkt durch Rechnung möglich. Man könnte etwa einen ~~Punkt~~ Coordinatenkreuz und einen Punkt ~~x y~~ als Mittelpunkt der Strahlen beziehen annehmen. Dann die Form der ursprünglichen Form construiren u. s. f. Dann würde man finden, dass jeder w' ~~linear~~ linear gebrochen von w wird und daraus folgt unsere Behauptung. Wir wollen ~~das~~ diese Rechnung nicht ausführen und uns mit der Bemerkung begnügen, dass in Folge der Construktion die Transformation eine ein-eindeutige und zwar ausnahmslos ein-eindeutige ist und in Folge dessen nur eine lineare sein kann. Dagegen sei noch überlegt, ob auch die allgemeinste lineare Transformation damit erreicht ist. d. h. Constanzählung ist vorzunehmen. Nullpunkt + Richtung = 3.

Ende des § 18

Unsere ~~Fortsetzung~~ Fortsetzung des § 19.

für mehrere Grundformen zu modificiren ist. Man hat dann nur in der Simultan-Quelle für $A_0 A_1 \ldots A_N$: $\frac{d^i f}{N!}$ $a_0, A_1, \ldots A_N$

noch zu setzen $F_0\, F_1 \ldots F_N$.

$$F_i = \frac{N-i!}{N!} \frac{d^i F}{d x_2^i}$$

Dadurch tritt die Bedeutung der Quelle in das volle Licht, indem dieselbe fähig ist, die ganze Covariante zu ersetzen. Die Rechnung mit den Quellen allein ist deshalb direkt, wie man sieht erlaubt. Um die Erklärung und Verwendbarkeit der Methode zu geben, mögen die folgenden Einfachen Beispiele dienen:

1.) $h = 2(a_0 a_2 - a_1^2)\, x^{2(n-2)} + \ldots = f_0 f_2 - f_1^2$

$$\frac{f \frac{d^2 f}{\partial x^2}}{n(n-1)} - \frac{\left(\frac{df}{\partial x}\right)^2}{n^2} = 0$$

$$n f \frac{d^2 f}{\partial x^2} - (n-1)\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = 0 \qquad f = (c_1 x + c_2)^n$$

$n\,(c_1 x + c_2)^n\, n\, c_1 (n-1)\, c_1 (c_1 x + c_2)^{n-2} - (n-1)\, n^2\, (c_1 x - c_2)^{2n-2}\, c_1^2 = 0$

2.) $\mathfrak{T} = (f, F)_1 = f_0 F_1 - f_1 F_0$

$$f \frac{\frac{dF}{dx}}{N} - \frac{F\frac{df}{dx}}{n} = 0 \qquad \frac{\frac{dF}{dx}}{NF} = \frac{\frac{df}{dx}}{nf}, \quad lF^{\frac{1}{N}} = lf^{\frac{1}{n}} + C$$

$$F = C f^{\frac{N}{n}} \qquad \frac{N}{n} = \frac{N}{\nu}$$

$$f = \varphi^{\nu} \quad F = \varphi^{N} \qquad n = N \text{ sofz } f = F$$

3.)

$$(f,F)_i = (a_0 x_1^{m} + \dots) \qquad m = n + N - 2i$$

$$(f,F)_i = f_0 F_i - \binom{i}{1} f_1 F_{i-1} + \dots \pm f_i F_0$$

f enthalte einen Linfakt. l fach $\qquad f_i \dots l-i$ –

F — denselben " L — $\qquad F_i$ – $L-i$ –

$(f,F)_i$ ist d — $l+L-i$

$$n + N - 2i < l + L - i$$

$$n + N < l + L + i \qquad (f,F)_i = 0.$$

$$n = N \quad l = 1 \quad L = n$$

$$f, \quad F = (c_1 x_1 + c_2 x_2)^n$$

$$(f,F)_n = 0, \quad i = n \quad 2n < 1 + 2n$$

Für $n + N = l + L + i$ ist jene $i$te Ueberschiebung eine vollständige Potenz jenes Linearfaktors.

Wir kommen nun zu einer ganz neuen Darstellung der Invariante Gebilde nämlich:

§20 Symbolische Darstellung der Invarianten und Covarianten

Die Kenntniss dieser wichtigen Methode ist schon deshalb nothwendig, weil fast jede moderne invariantentheoretische, sowie die meisten analytisch geometrischen Arbeiten die Kenntniss dieser Methode voraussetzen und daher für jeden Unvertrauten bleiben, der nicht wenigstens mit der Sprache und den Begriffen dieser Methode vertraut ist. Für den Anfänger hat die Auffassung dieser Methode einige Schwierigkeiten, die hauptsächlich auf Rechnung der Ungewohnheit kommen, mit symbolischen Ausdrücken zu rechnen. Wir wollen daher ganz allmählich und schrittweise vorgehen. Es soll ein Weg eingeschlagen, welcher

naturgemäss einfacher und dabei gleichzeitig die Pointe des Verfahrens hervortreten lässt und demnächst die Methode systematisch begründen.

Eine Grundform $f = a_0 x_1^n + (n) a_1 x_1^{n-1} \dots + a_n$

$$J = \int R(a_0 a_1 \dots a_n) = \sum z_{\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n}$$

$$= \sum z_{i_1 i_2 \dots} a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \dots$$

$$= \left[\sum z_{i_1 i_2 \dots} a_{i_1} b_{i_2} c_{i_3} \dots \right] - \text{alle } b = c = \dots = a$$

$$= \left[\sum z_{i_1 i_2 \dots} a^{i_1} b^{i_2} c^{i_3} \dots \right] - \text{alle } b = c = \dots = a$$

$$= \left[\int R(a, b, c, \dots) \right] \text{exp. Ind.} \quad \text{alle } b = c = \dots = a$$

Für eine Covariante sind dieselben Umformungen mit jedem einzelnen Gliede vorzunehmen. Ich bemerke, dass natürlich vorläufig diese $\int R$ Fn. Klam. complicirter sein wird, wie die ursprüngliche und daher die

Gewonnene Schreibweise erst dann einen bestimmten Vorzug hat, sobald man für gewisse Formen eine Eigenschaften gefunden hat, welche ihre Schreibung vereinfachen. Doch bevor wir dazu übergehen wollen wir erst an einfachen Beispiel die Schreibweise so weit verfolgen:

1.) $f = a x_1^n + \binom{n}{1} a x_1^{n-1} x_2 \dots + a x_2^n = (x_1 + a x_2)^n$ nach der Anzahl: $(Exp = I.d.)$

2.) $(f,f)_2 = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \dots \pm a_n a_0 = a b^n - \binom{n}{1} \dots$

Also, $(f,f)_n$ = n-te Potenz von $(a-b)$ $= \left[(b-a)^n\right]$ nach der Anz. $Exp = I$, $b = a$

z. B. $n = 2$

$(f,f)_2 = h = (b-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2 =$

$= a^2 b^0 - 2 a^1 b^1 + b^2 a^0 = a_2 b_0 - 2 a_1 b_1 + b_2 a_0$

$= 2(a_0 a_2 - a_1^2)$

Anm. Wir hatten begonnen mit der Darlegung der symbolischen Methode: $I = \dots$ Desinv. $f = (x+a)^n$ $(f,f)_n = (b-a)^n$. Die eindeutige Richtigkeit ist immer zu prüfen, wir kommen nun zur symb. Darstellung von D

(Also es ist, wie wir auch oben gesehen haben, immer eine eindeutige Richtigkeit zu prüfen.)

3.) $D = a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots n a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}$

Wir denken uns den Ausdruck, hinter D symbolisch geschrieben aber ausgeführt blos die verschiedenen Buchstaben ~~Die neuen Buchstaben, da mit keine Verwechslung~~ eingeführt:

$$D = \delta_0^0 \left(\frac{\partial}{\partial a_1} + \frac{\partial}{\partial b_1} + \frac{\partial}{\partial c_1} + \dots \right)$$

$$+ 2\delta_1^1 \left(\frac{\partial}{\partial a_2} + \frac{\partial}{\partial b_2} + \frac{\partial}{\partial c_2} + \dots \right)$$

$$+ n\delta_{n-1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial a_n} + \frac{\partial}{\partial b_n} + \frac{\partial}{\partial c_n} + \dots \right)$$

$$= \delta_0^0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2\delta_1^1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + n\delta_{n-1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n}$$

$$+ \delta_0^0 \frac{\partial}{\partial b_1} + 2\delta_1^1 \frac{\partial}{\partial b_2} + \dots + n\delta_{n-1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial b_n}$$

wenn wir die Indices als Potenzexponenten schreiben, so können wir, da die Differentialquotienten nach den a nicht von a die von b nicht von b abhängig unbedenklich schreiben:

$$= \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial c} + \dots = D \qquad \left(\begin{array}{l} Exp = 2 \dots d \\ b = c \dots = a \end{array} \right)$$

Dar gilt für jede beliebige Funktion der Koeffizienten in symbolischer Schreibart.

Beispiel: $a_0 a_4^2 - a_1 a_2 a_5$

$$F = a_2^3 - 3a_1 a_2 a_3 + a_4 a_0^2 - a_5 a_2 a_1$$

$$D = a_0 b_4 c_4 - a_1 b_2 c_5$$

$$= b_4 c_4 - a b^2 c^5$$

$$= 4b^3 c^4 + 4b^4 c^3 - b^2 c^5 - 2ab c^5 - 5ab^2 c^4$$

$$F = a_0 a_4^2 - 4 a_1 a_3 a_4$$

$$= a_0 b_4 c_4 - 4 a_1 b_3 c_4$$

$$D = b^4 c^4 - 4ab^3 c^4$$

$$D = 4b^4 c^3 - 12ab^2 c^4 - 16ab^3 c^3$$

$$= 4a_0 a_4 a_3 - 12 a_1 a_2 a_4 - 16 a_1 a_3^2$$

$$D = 4a_0 a_3 a_4 - 12 a_1 a_2 a_4 - 16 a_1 a_3^2$$

Ist also richtig.

Wir benutzen diese Darstellungsweise, um die Differentialgleichung $D = 0$ für die $\mathfrak{H}(a, b, c \ldots)$ umzusetzen und zu reversieren. Wir beginnen mit der Invariante

$$I = \mathfrak{H}(a, b, c \ldots) = \mathfrak{H}(a, (ab), (ac) \ldots) = \mathfrak{H}(b, (ba), (bc) \ldots)$$

1.) $b = a + (b-a) = a + 1\cdot(ab)$
$c = a + (c-a) = b + (ac)$

2.) $a = b + (a-b) = b + (ba)$
$c = b + (c-b) = b + (bc)$

$$= \mathfrak{H}(c, (ca), (cb) \ldots)$$

wobei bemerken, daß $\mathfrak{H}$ ein Ausdruck Null sein kann, ohne auch ein symbolischen Ausdruck zu sein. Wie dasselbe direkt erkennen zu lassen z. B.

$$a^2b^3 - b^3a^2 = a_2a_3 - a_3a_2 = 0$$

Wenn wir also D anwenden, so werden wir noch nicht identisch Null erhalten, sondern erst nach der Rückkehr zur gewöhnlichen Ausdrucksweise. Eine solche Rückkehr ist aber umständlich und es ist gerade prinzipiell von Jedem

Gang aller an der symbolischen Darstellungsweise selbst erkennen zu können. Dann verhilft uns, wenn wir den symbolischen bezüglich der einzelnen Symbole symmetrisiert machen.

$$F = \mathfrak{S}\, R(a, b, c \ldots)$$
$$= \mathfrak{S}\, R(b, a, c \ldots)$$

$$F = \mathfrak{S}_{ab}\, GRS(a, b, c \ldots)$$

Es ist selbstverständlich, dass nun der frühere Fall nicht mehr eintreten kann: Denn

kommt irgendwo ein Glied

$$a^{\sigma_1} b^{\sigma_2} \ldots \text{ vor, so auch } \sum a^{\sigma_1} b^{\sigma_2} \ldots = n\, a_{\sigma_1} a_{\sigma_2} \ldots$$

Daher

$D = 0$ in symbolischer Schreibweise $\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial c} \ldots = 0$

Insbesondere bei anderen wir die Invariante:

$$I = \mathfrak{S}\, RS(a, b, c \ldots)$$

$$b = a + (b - a) = a + (ab)$$
$$c = a + (c - a) = a + (ac)$$

$= \Phi(a, (ab), (ac) \ldots$

$D = 0$ d.h. $\frac{\partial R}{\partial a} = 0$ d.h. R von a unabhängig.

Bei unserer symbolischen Darstellung erscheint unsere Invariante nur von den symbolischen Differenzen $(ab), (ac) \ldots$ abhängig. Um umgekehrt zu beweisen, daß ich irgend eine nur von den Differenzen $(ab)(ac)\ldots$ bin, so genügt dieser Ausdruck Φ nach der Rechenbefehlen zu Φ der symbolischen Darstellungsweise der Differentialgleichung $D = 0$ und ist also eine Invariante wenn er homogen in a bar ist und $ng - 2p = 0$ wird.

Wann ist das letztere nun der Fall?

homogen in a $\quad g =$ Grad in Φ * Symbolzahl $= \sigma$

in bar $\quad p =$ Grad in den Symbolen $= \gamma$

$n\sigma = 2\gamma$

$\Phi = \sum (ab)^{\sigma_1}(ac)^{\sigma_2}(bc)^{\sigma_3} \ldots \qquad \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots = \gamma$

Wie oft kommt ein bestimmtes Symbol, etwa a vor:

Beginnen wir zunächst mit der Invariante, so wissen wir von früher her, dass ein g. R. Funktion homogen u. isobar ~~R~~ $ng - 2p = 0$. $D = 0$ die nothwendigen Criterien sind.

$$J = R(a_0 a_1 \ldots a_n) = \bar{R}(a, b, c \ldots)$$

wo selbstverständlich nur die Abmachung R. Exp = Ind. $b = c = \ldots a$ gilt. Wir versuchen die obigen charakteristischen Eigenschaften auf den symbolischen Ausdruck R zu übertragen. 1.) Homogen d. h. in jedem Gliede dieser Rat. Funkt.

$$J = \sum \sum a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$$

müssen gleich viele Symbole g ~~st~~ vorkommen, ~~dann~~ und g ist dann der Grad der Invariante, wie ja auch der Construktion der symbolischen Ausdrücke folgt. Diese Forderung ist hier keine Bedingung. Denn Hinzufügung der Nullten Potenz, falls ein Symbol fehlt.

2. Isobar. $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = p$ für alle Glieder.

3.) $ng - 2p = 0$

4.) $DJ = 0$ wird erfüllt sein wenn wir den Rationalen Ausdruck so wählen, dass er nur von der Differenzen ~~b~~

$b-a = (ab)$ ~~$c-a$~~ ~~$d-a$~~

$c-a = (ac)$ $c-b = (bc)$

$d-a = (ad)$ $d-b = (bd)$ $d-c = (cd)$

abhängt. Denn dann ist

$$DR = \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial c} + \cdots = 0$$

Also:

$$R = \sum K_{(ab)^\sigma (ac)^\tau (bc)^\varrho (bd)^\mu \cdots} \cdots$$

Dann werden aber:

$$\sigma + \tau + \varrho + \mu + \cdots = p$$

d. h. = Grade in den Symbolen

Anm. 3.) können wir eine andere Form geben, wenn wir bedenken, dass $K_a^\sigma, K_b^\tau, K_c^\varrho \leqq n$

$$K_a^\sigma + K_b^\tau + K_c^\varrho + \cdots = 2p(\sigma + \tau + \varrho + \cdots) = 2p$$

$$= ng$$

d. h. $K_a^\sigma = K_b^\tau = \cdots = n$

Also in jedem Glied muss jeder Symbol n mal vorkommen

Also Satz:

~~Die Summe von Produkten der Symbole~~ a

Der Ausdruck $\sum A_{\sigma\tau\rho\ldots}(ab)^{\sigma}(ac)^{\tau}(bc)^{\rho}\ldots x^{\ldots}$

symbolische
Der mittels g Symbolen $a, b, c \ldots$ gebildete Ausdruck

$\sum A_{\sigma\tau\rho\ldots}(ab)^{\sigma}(ac)^{\tau}(bc)^{\rho}\ldots$ ist eine Invariante,

vom Grade g und dem Gewichte p, wenn p die Zahl der auftretenden Symbole, $p = \sigma + \tau + \rho + \ldots$ der Grad bezüglich der Symbole die allen Gliedern gemeinschaftliche Exponentensumme $\sigma + \tau + \rho + \ldots$ bedeutet und überdies jeder der g Symbole $a, b, c \ldots$ in jedem einzelnen Gliede einmal vorkommt.

Beispiel $f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = (x+a)^n$

hat die Invariante:

$$(f,f)_n = (ab)^n \quad \Big| \begin{matrix} g=2 \\ p=n \end{matrix}$$

$n = 4$,

$$i = (f,f)_4 = (ab)^4 \quad \Big|$$

$$(ab)^2(bc)^2(ca)^2 \quad \Big| \begin{matrix} g=3 \\ p=6 \end{matrix} \quad \Big| \text{daher} = j \cdot \text{const.}$$

Die Constante liesse sich leicht durch Berechnung einer bestimmten Glieder finden, doch wollen wir diese Identität direkt bestätigen.

Wir müssten dann entweder vom symbolischen Ausdruck und deren umwerthen oder von gewöhnlichen Ausdrucke ausgehen und diese symbolisch schreiben. Wir wollen das letztere thun:

$$j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^0 a^1 a^2 \\ b^1 b^2 b^3 \\ c^2 c^3 c^4 \end{vmatrix}$$

$$= b c^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = b c^2 (ab)(ac)(bc)$$

$$j = b c^2 (ab)(ac)(bc)$$

$$= - a c^2 (ab)(ac)(bc)$$

$$= + c a^2 (ab)(ac)(bc)$$

$$= - c b^2 (ab)(ac)(bc)$$

$$= + a b^2 (ab)(ac)(bc)$$

$$= - b a^2 (ab)(ac)(bc)$$

$$6j = (ab)(ac)(bc) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2$$

Wir gehen nun dazu über die Covariante allgemein symbolisch darzustellen. Die selbe ist:

$f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots a_n = \alpha(x+a)^n$

$C = R(a_0 a_1 \dots a_n x)$ homogen g isobar p | $m = ng - 2p$

$\Delta C - x \frac{\partial C}{\partial x_1} = 0$

oder $\Delta C - \frac{\partial C}{\partial x} = 0$

C wird sein eine $R(a, b, c \dots x)$, wo wieder die symbolische Abmachung gilt. Wir versuchen wieder die charakteristischen Eigenschaften der Covariante auf den symbolischen Ausdruck zu übertragen.

1.) Homogen d.h. in jedem Gliede jener R müssen gleich viel Symbole g vorkommen, g ist der Grad. Reine Bedingung.

2.) Isobar: d.h. In jedem einzelnen Gliede irgendeiner Coefficiente von x müssen $\alpha + \beta + \gamma \dots = p$ d.h.

$C = C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \dots C_m$ $\quad C_i = \sum \sum a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots \alpha + \beta + \gamma \dots = p - i$

3.) $m = ng - 2p$

4.) $\Delta C - \frac{\partial C}{\partial x} = 0$ wird erfüllt, wenn die R, so wählen, dass

er nur von den Differenzen

$b-a=(ab)$ $(c-a)=(ac)$ .. $x+a$ ~~$x+b$~~ $=x_a$, $x+b=x_b$

abhängt. Denn dann ist:

$$\mathfrak{D}R \cdot \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial x_c} + \ldots - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

Also:

$$R = \sum Z_{(ab)}^{\sigma}{}_{(ac)}{}^{\tau}{}_{(bc)}{}^{\varrho} \ldots \; x_a^{\xi} x_b^{\eta} \ldots$$

Das ~~$\mathfrak{D}$~~ Leitglied erhalten wir wenn wir den Coefficienten der höchsten Potenz von x d. h.

$$C_0 = \sum Z_{(ab)}{}^{\sigma}{}_{(ac)}{}^{\tau}{}_{(bc)}{}^{\varrho} \ldots$$

$$\sigma + \tau + \varrho + \ldots = p$$

Die ~~$\mathfrak{D}$~~ weiteren Coefficienten erhalten wir von selber, wenn wir eine Einheit ~~Coefficient~~ Gewicht z. B.

$$C_1 = \sum Z_{(ab)}{}^{\sigma}{}_{(ac)}{}^{\tau}{}_{(bc)}{}^{\varrho} \ldots \quad (\xi a + \eta b + \ldots)$$

$m = ng - 2p$. Das Symbol a hat ~~α~~ und b ~~β~~ und

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \xi + \eta + \ldots = 2(\sigma + \tau + \varrho + \ldots) + \xi + \eta + \ldots$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = 2p + m = ng$$

und wegen $\alpha \leqq n$ $\beta \leqq n$ ... muss $\alpha = \beta = \gamma = n$ sein d.h. jeder Symbol muss gleich oft vorkommen. Dass für alle Glieder der Summe

$$\xi + \eta + \ldots \quad \text{constant} = m$$

werden muss folgt aus der nothwendigen Form eigenschaft der Covariante.

Fassen wir wiederum die nächsterhaltene gefundenen Eigenschaften in einen Satz zusammen:

Der symbolische Ausdruck $\sum z_{(ab)}^{\sigma}(ac)^{\tau}(b_1)^{\sigma}\ldots a_x^{\xi} a b_x^{\eta}$ ist eine Covariante vom Grade g der Ordnung m und dem Gewichte p, wenn p (resp. m) die allen Gliedern gemeinschaftliche Exponenten summe $\sigma+\tau+\varrho+\ldots$ resp. $\xi+\eta+\ldots$ bedeutet und überdies jeder der g Symbole $a, b, c \ldots$ in jedem einzelnen Gliede je n mal vorkommt.

Beispiel: $f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots$ $\left(\begin{smallmatrix} g=1 \\ x=0 \end{smallmatrix}\right)$ $m=n$

Wir hatten vorhin bei den Invarianten, solche in gewöhnlicher Weise hingeschrieben und dann dieselbe symbolisch

Ausdruck konstruirt. Nun wollen wir der Abbildungsmethode wegen umgekehrt verfahren, aber einen symbolischen Ausdruck einführen, der nach dem früheren alle Eigenschaften einer Covariante besitzt:
Der einfachste wird sein:

$$(ab)^i a_x^{n-i} b_x^{n-i}$$

$g = 2$
$p = i$
$n = 2n - 2i$
} für $i = n$ Invariante.

Aus diesen Zahlen erkennen wir schon, dass jener Ausdruck nur $(b, f)_i$ sein kann, aber Bestätigung durch Berechnung der Quelle, war sehr einfach ist.

$$C_0 = (ab)^i = b^i - \binom{i}{1} b^{i-1} a + \binom{i}{2} b^{i-2} a^2 + \cdots \pm a^i$$

$$= a_0 a_i - \binom{i}{1} a_1 a_{i-1} + \cdots \pm a_0 a_i$$

$n = 3$

$$h = (ab)^2 a_x b_x$$

$$(ab)^2 (bc) a_x c_x^2$$

$g = 3$
$p = 3$
$n = 3$

Aus den Zahlen erkennen wir schon darin die Covariante T und in der That die Berechnung der Quelle giebt:

$$C_0' = (b-a)^2(c-b)$$

$$= cb^2 - 2abc + a^2c - b^3 + 2ab^2 - ba^2$$

$$= a_0a_1a_2 - 2a_1^3 + a_0a_1a_2 - a_0^2a_3 + 2a_0a_1a_2 - a_0a_1a_2$$

$$= 3a_0a_1a_2 - 2a_1^3 - a_0^2a_3$$

~~Darstellung der Polaren~~

~~2~~ Ich ~~komme~~ habe hier die Bemerkung einzuschalten; ~~Zum Schluss dieses Paragraphen möchte~~ ~~sich noch bemerken~~, dass man die Symbole (ab) – a_x --- meist umständlicher nämlich homogen deutet, ohne dass damit der Sinn irgend wie modificirt wird.

$$x = \frac{x_1}{x_2} \qquad a = \frac{a_2}{a_1} \qquad b = \frac{b_2}{b_1} \quad \ldots$$

$$f = (x+a)^n = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)^n x_2^n a_1^n = (a_1x_1 + a_2x_2)^n = a_x^n$$

$$= a_1^n x_1^n + a_1^n a_2^n \qquad a_1^{n-i} a_2^{i} = b_1^{n-i} b_2^{i} = a_i$$

$$(ab) = b - a = a_1b_2 - a_2b_1$$

Rückkehr, wenn wir $x_2 = 1$, $a_1 = b_1 = c_1 = 1$, ~~$a_2 = b_2 = c_2 =$~~ $a_2 = a$, $b_2 = a$ ...

~~Doch~~ werden wir nun an der Polarenbildung zeigen, wie vortheilhaft diese homogene Symbolik ist:

$$f = (a_1x_1 + a_2x_2)^n = (a_1[x_1 + \lambda y_1] + a_2[x_2 + \lambda y_2])^n = (a_x + \lambda a_y)^n = a_x^n + \binom{n}{1}\lambda a_x^{n-1} a_y + \ldots$$

$$P_y = a_x^{n-1} a_y \qquad P_y^2 = a_x^{n-2} a_y^2 \ldots$$

~~Warum weiter zu thun haben, ist jetzt klar vorgezeichnet: natürlich die Erweiterung und Übertragung auf mehr Form~~

§ 21. Symbolische Gebilde in der bisherigen Darstellung.

$$P_y^3 = a_x^{n-3} a_y^3 \qquad P_y = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Diese Polare war nach dem früheren Covariante mit zwei Variabelenreihen x, y. Das sieht man hier berücksichtigt, denn unser Ausdruck enthält alle Kriterien, die der letzte Satz erfordert.

Die vorangehende Symbolik hat aber noch einen weiteren höheren principiellen Vortheil: Sie ermöglicht nämlich den Nachweis, dass der letzthin aufgestellte Satz von der symbolischen Darstellung der Invarianten und Covarianten umkehrbar ist.:

Jede Invariante oder Covariante einer Grundform ist ein symbolischer Ausdruck von der im vorigen Satze beschriebenen Art, der aber darüber der oben charakterisirten Art.

Ich will nun den Beweis nicht genau ~~und ausführen~~ hier ausführen, sondern nur schrittweise den Gedanken gehalt entwickeln, weil ich glaube, dass sich die gründliche Ausführung solcher Symbolischer Schlüsse nicht für den Vortrag eignet und auch zum Verständniss der Theorie gar nicht so ~~durchaus~~ nothwendig ist.

Wir beweisen zunächst den folgenden auch an sich wichtigen Satz:

Jede Covariante zweier Variabelnreihen ist in der Gestalt:

$$C^{n\,m}_{(x,y)} = P_y^m C^{(0)}_{(x,y)} + P_y^{m-1} C^{(1)}_{(x,y)} + \ldots + P_y^{m-m} C^{(m)}_{(x,y)} \qquad m \leq n$$

darstellbar, wo $C^{(0)}, C^{(1)} \ldots C^{(m)}$ Covarianten der einen Variabelnreihen x_1, x_2 bedeuten

xy sind identische Covarianten vom Grade Null

$$\left[C\left(x^{n+m}\, y^{m}\right)\right]_{y=x} = C\left(x^{n+m}\right) = C^{(0)}$$

Andererseits zeigt man leicht, dass

$$\left[\mathfrak{P}_y^{m}\, C\right]_{y=x} = C$$

Denn aus der Definition der Polaren:

$$C(x_1+\lambda y_1,\ x_2+\lambda y_2) = C + \binom{m}{1}\lambda\, \mathfrak{P}_y C + \binom{m}{2}\lambda^2\, \mathfrak{P}_y^2 C + \dots$$

$$C((1+\lambda)x_1,\ (1+\lambda)x_2) = (1+\lambda)^m C = C + \binom{m}{1}\lambda\left[\mathfrak{P}_y C\right]_{y=x} + \binom{m}{2}\lambda^2\left[\mathfrak{P}_y^2 C\right]_{y=x}$$

Wir bilden nun die Differenz:

$$C\left(x^{n},\, y^{m}\right) - \mathfrak{P}_y^{m}\, C^{(0)} = (xy)\, C\left(x^{n-1}\, y^{m-1}\right)$$

oder:

$$C\left(x^{n},\, y^{m}\right) = \mathfrak{P}_y^{m}\, C^{(0)} + (xy)\, C\left(x^{n-1},\, y^{m-1}\right) \quad \text{q.e.d.}$$

Mit diesem Satz sind alle Covariante von mehr Variablenreihe auf solche mit nur einer Variablenreihe zurückgeführt. Daher Beschränkung. Uebrigens weist auch nicht, dass die Einführung mehr Variablereihe in die Grundform nichts neues giebt.

Nach diesem ersten Schritte erhielten wir ein Resultat, welcher angewendet werden kann, um den folgende Satz zu beweisen:

Jede invariante Bildung für ein beliebiges simultanes System lineare Grundformen ist eine ganze rationale Funktion ihrer selbst und der aus je zwei gebildeten Determinante (ersten Ueberschiebungen)

d. h. Haben wir die Grundformen:

$f = a_1 x_1 + a_2 x_2$, $\varphi = b_1 x_1 + b_2 x_2$, $\psi = c_1 x_1 + c_2 x_2 \ldots$

so haben wir ausser ihnen selbst noch die Invarianten:

$(f, \varphi)_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$, $(f, \psi)_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 \ldots$

Unser Satz behauptet, dass weitere Invarianten nicht existiren, oder vielmehr alle weitere ganz und rational durch diese ausdrückbar sein. Denn ungehört jede ganze rat. Function dieser ist wieder eine invariante Bildung.

Wenn wir ein Invariante von zwei Variablenreihen haben und substituiren: $y_1 = -l_2 \quad y_2 = l_1$

so geht

$$(x\,y) = l_1 x_1 + l_2 x_2 = l$$

~~Der d. h.~~ und unser Invariante hängt nun nicht von zwei Variablenreihen und von den Coefficienten der Linearform ab. Der vorige Satz zeigt dann, dass man Invarianten einer Formensystem und einer Linearform immer durch diese und niedere Bildungen

ausdrücken kann und dadurch durch den Schluss von n auf $n+1$ erkennt man die Richtigkeit der Behauptung. Diese Schlüsse sind alle von Aronhold mit peinlicher Genauigkeit in seinen Lehrbuch ausgeführt, der ja auch der eigentliche Begründer der Symbolik ist.

Um nun endlich unseren ursprünglichen Satz zu beweisen stellen wir folgende Ueberlegungen an:

Eine Grundform f. Eine (gewöhnliche gestrichene) Covariante C. Wir haben (§ Polarenbildung) früher den Satz kennen gelernt, dass

$$C' b_0 \frac{\partial C}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial C}{\partial a_1} + \dots + b_n \frac{\partial C}{\partial a_n}$$

wiederum Covariante aber eine simultane für f und

$$f_1 = b_0 x_1^n + \dots + b_n$$

ist. Fahren wir so fort, bis schliesslich die Coefficienten nur noch in der ersten Potenz vorkommen, so erhalten wir aus C eine Simultane Covariante der Form

$$f = f_a, f_b, f_c \dots$$

wo alle Coefficienten nur linear vorkommen. Das ist der erste Schritt zur symbolischen Darstellung. Denn wir können

von dieser k^{te} Simultan-Covariante zu der ursprünglichen ohne weiteres Zurückkehren, wenn wir die Formen $f_a = b_a =$ identisch (sein). Wir können nun für $f_1, f_2 \ldots$ wirkliche Potenzen einführen

$$f_a = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n \quad - \quad f_b = (b_1 x_1 + b_2 x_2)^n$$

Dann wird unsere Simultan-Covariante aber eine Simultan-Covariante der Linearformen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \,, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 \,, \ldots$$

und also solche eine Summe von Produkten der ~~Form~~ Gestalt:

$$\sum 2 (ab)^{\delta} (bc)^{\tau} (ca)^{\varepsilon} \ldots a_x^{\delta} b_x^{\varepsilon} \ldots \quad q.e.d.$$

§ 21. Simultan-invariante Gebilde in symbolischer Darstellung.

Wir können uns hier sehr kurz fassen, da wir ja vorhin im vorigen § gewissermaßen solche simultan-

den symbolischen Ausdrücken begegneten. Die Uebertragung geschieht am einfachsten, wenn wir den entsprechenden Satz für eine Bildung durchgehen und entsprechend modificiren. Wir gewinnen so den Satz: „in den wirklich für die Covariante und nicht erst für die Simultaninvariante aussprechen:

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots$$
$$F = A_x^N = B_x^N = C_x^N = \dots$$

$$(ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$
$$(a\alpha) = \alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1$$
$$(\alpha\beta) = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$
$$(AB) = A_1 B_2 - A_2 B_1$$
$$(aA) = a_1 A_2 - a_2 A_1$$
$$(\alpha A) = \alpha_1 A_2 - \alpha_2 A_1$$
$$(BC) = B_1 C_2 - B_2 C_1$$

Der symbolische Ausdruck $\sum z_{(ab)}^{\varepsilon}(ac)^{\eta}\dots (a\alpha)^{\mu}(b\alpha)^{\varrho}\dots(AB)^{\kappa}(AC)^{\lambda}\dots a_x^{\xi} b_x^{\eta} A_x^{\xi} B_x^{\xi}\dots$ ist eine $\frac{\xi}{p}$ simultane Covariante von dem Grade q in den Coefficienten von $f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots$, von Grade Ξ in den Coefficienten von $F = A_x^N = B_x^N = C_x^N = \dots$ von Grade n und dem Gewichte p, wenn p resp. n die allen Gliedern gemein

schaftliche Exponenten von $\sigma + \tau + \mu + \varrho + \cdots$ resp. $\xi + \eta + \zeta + \varsigma + \cdots$ sind und überdies jedes der g Symbole $a, b, c \ldots$ in jedem einzelnen Gliede ε mal ~~vorkommt~~ dagegen jedes der G Symbole $A, B, C \ldots$ in jedem einzelnen Gliede je N mal vorkommt. Umgekehrt ist jede invariante Bildung durch solche Symbolik darstellbar.

Zur Erläuterung dienen am besten einige Beispiele: Die identische Ueberschiebung zweier Formen: $(aA)^n a_x^{n-1} A_x^n$

$n = 2 \quad N = 1 \quad \left| \begin{matrix} f = a_x^2 \\ F = A_x^2 \end{matrix} \right| \quad (aA)(aB) \qquad \begin{matrix} g = 1 \\ G = 2 \\ p = 2 \\ m = 0 \end{matrix}$

Identität

$= (A-a)(B-a) = AB - aB - aA + a^2$

$= a_0 A_1^2 - 2 a_1 A_1 + a_2 A_0^2$ = dem alten Resultante der beiden Formen.

Nun, meine Herren, bisher besass die Symbo-

lich hauptsächlich den Vorteil kürzer und präziser ~~A~~ Schreibweise. Ich erinnere wie sich die Grundform, die Ueberschiebung und die Invariante j und r einfach hinschreiben liessen und zwar so, dass einmal der ganze Ausdruck eindeutig gegeben war, dann dass die charakteristischen Zahlen g, ρ, i, n ~~[illegible]~~ sofort hervortraten und ablesbar waren z. B.

$$(f, F)_i = (aA)^i a_x^{n-i} A_x^{N-i}$$

Bei der grossen Bedeutung, welche einmal das Formale in der Mathematik besitzt ist das kein geringer Vorteil, den wir erst recht bei höheren Variablengebieten werden schätzen können, wo nur die Symbolik nicht nur die ~~Schreibweise~~ Einkleidung, sondern ~~die De~~ auch die Ueber~~[illegible]~~ ~~aller~~ ~~d~~tragung der invariantentheoretischen Ideen erleichtern wird. Für jetzt aber

behandeln wir noch einen weit wichtigeren Vorteil der Symbolik, in dem wir nämlich zeigen, wie man mit Symbolen rechnet.

§ 22. Die Rechnung mit Symbolen.

Die leitende Idee des gegenwärtigen § ist die Folgende. Wir suchen die invariante Operation aus der wirklichen Darstellungsweise in die symbolische Sprache zu übersetzen, wie wir dasselbe beispielsweise für den Differentiationsprozess D gethan haben oder genauer gefragt, wir fragen, welche Operation wir mit den Symbolen vornehmen müssen, damit der Erfolg einer gewissen Operation am wirklichen Ausdrucke gleichkommt. Wie ich schon erwähnte entspricht für eine rationale Funktion der Coefficient

$$D = a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \cdots \qquad \text{d: } \frac{d}{da} + \frac{d}{db} + \frac{d}{dc} + \cdots$$

Wir betrachten ein anderes Beispiel, welches auch auf ein bekanntes Resultat führt, welches aber für die ganze symbolische Rechnung von fundamentaler Wichtigkeit ist:

$$f = a_x^n \qquad P_y = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$P_y f = n a_x^{n-1} a_1 y_1 + n a_x^{n-1} a_2 y_2 = n a_x^{n-1} a_y = a_y \frac{d}{da_x}$$

Wir setzen wir polarisieren, wenn wir nach a_x differenzieren und mit a_y differenzieren.
Und in der That wir wollen den hiebei gleichsam unbewusst obenerwähnten Gedanken zum Prinzip erheben, indem wir mit Symbolen wie mit y wirklichen Potenzen und Produkten rechnen, indem wir dabei nur die Vorsicht beachten, dass die gesamte Potenzhöhe eines einzelnen Symbols nicht n übersteigen darf. Dann würde a_{n+1}, a_{n+2} keinen Sinn haben. Sind mehrere Grundformen u, v da, so dürfen diese Symbole $A, B,$ natürlich nicht N übersteigen.

Beispielsweise ist f^2 nicht $= a_x^n a_x^n = a_x^{2n}$,
was gar keine Form hat, sondern $= a_x^n b_x^n$ Also ein
früher einer neuen Symbole.

Wir machen ferner den ausgiebigen Gebrauch von der Vertauschbarkeit der gleichberechtigten Symbole $a, b, \ldots$

z. B.
$(ab)^i f_i = (ab)^i a_x^{n-i} b_x^{n-i} = 0$
für ein ungerades i.

Dagegen
$(af)^i f_i = (af)^i a_x^{n-i} A_x^{n-i}$
Denn die Symbole sind garnicht gleichberechtigt
sie führen zu verschiedenen Formenrepräsentanten.

Endlich benutzen wir noch gewisse Identitäten
zwischen Symbolen, auch wenn letztere nicht
gleichberechtigt sind:

$$(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = 0$$

für x setze d:

$$(ab)d + (bc)(ad) + (ca)(bd) = 0$$

$$a_x b_y - b_x a_y = (ab)(xy)$$

für c setze $-x$, für d setze $-y$:

$$a_x b_y - b_x a_y = (ab)(xy)$$

So wird wir denn vollständig ausgerüstet und das ganze Geheimnis symbolischer Rechnung beruht nun auf keinen prinzipiellen Schwierigkeiten mehr, von denen lediglich auf der gewandten Benutzung der angegebenen Rechnungsregeln.

~~$(ab)_x + (b)_x a_x + (a) b_x$~~

Wir werden nun ~~einige Beispiele durch~~ Hilbert einige Anwendung machen indem wir die früher auf direkten Wege gefundenen und tabellarisch zusammengestellten Inv. und Kov. symbolisch schreiben und ableiten durch bloße Ueberschreibung. Wir nehmen also Tabelle § 8 durch:

1.) $n = 1$ $\quad f = a_x^x$

2.) $n = 2$ $\quad f = a_x^2$, $\quad h = (f,f)_2 = (ab)^2$.

3.) $n = 3$ $\quad f = a_x^3$, $\quad H = (ab)^2 a_x b_x$ $\quad T = (ab)(bc) a_x b_x c_x^2$

war früher gelegentlich als Beispiel abgeleitet. Hier aber wollte wir ja alles auf Ueberschiebungen zurückführen:

$$f = a_x^3 \qquad \mathcal{H} = (ab)^2 a_x b_x = \mathcal{H}_x^2$$

$$(f, \mathcal{H})_1 = (a\mathcal{H})\, a_x^2 \mathcal{H}_x$$

$$(ab)^2 a_y b_x + (ab)^2 a_x b_y = 2\,\mathcal{H}_x \mathcal{H}_y$$

$$\tfrac{1}{2}(ab)^2 a_x b_y = \tfrac{1}{2}\mathcal{H}_x \mathcal{H}_y$$

$x = -x_1$

$y = c \quad y_1 = -c_1$

$y_1 = c_1$

$$(ab)^2 (bc)\, a_x c_x = \mathcal{H}_x (\mathcal{H}c)\, c_x^2$$

$$= (f, \mathcal{H})_1 = \mathcal{T}$$

$$\mathcal{L} = (ab)^2 a_x b_x = \mathcal{H}_x^2 = \mathcal{T}_x^2$$

d. Diskr. von $\mathcal{H} = (\mathcal{H}\mathcal{K})^2$

$$(ab)^2 (a\mathcal{K})(b\mathcal{K}) = (\mathcal{H}\mathcal{K})^2$$

~~$(ab)(a\mathcal{K})\, b\mathcal{K})$~~ In der oben doppelt unterstrichenen Form:

$x = c \quad y = d$

$$(ab)^2 (ac)(bd) = (\mathcal{H}c)(\mathcal{H}d)$$

$(cd)^2 \qquad (cd)^2$

$(ab)^2(cd)^2(ac)(bd)$

~~$(ab)^2(ac)(bd)(cd)$~~ $^2 = (\mathcal{H}\mathcal{H})^2 = d$

Die linke Seite erfüllt in der That alle Bedingungen einer Invariante 4ten Grades 6ten Gewichtes.

$n = 4$, $f = a_x^4$, $i = (ab)^4$, $\mathcal{H} = (ab)^2 a_x^2 b_x^2$

T #1 f, ist leicht darzustellen, wenn wir bedenken dass er dieselbe Quelle wie T bei der ersten Form haben soll: Also:

$$T = (ab)^2(bc)\, a_x^2 b_x c_x^3$$

Die Zahlen stimmen in der That überein.

Wie man hier T durch Ueberschiebung erhält, dabei will ich mich nicht ~~da~~ aufhalten, da genau wie vorher:

$$T = (f, \mathcal{H})_1 \quad \text{ist.}$$

Endlich $j = (ab)^2(bc)^2(ca)^2$ haben wir damals gefunden. Um es durch Ueberschiebung aus $(f, h)_4$ wird ~~wird~~ ~~die~~ eine Invariante

von Grade 3 sein und die Form.

$$f = a x^4 \qquad h = (ab)^2 a_x^2 b_x^2 = H_x^4$$

$$(f,f)_4 = (aH)^4 = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2 .$$

Wir wollen uns hier vorläufig mit diesen Beispielen symbolischer Rechnungsart begnügen und nur den hier beiläufig gefundenen Theorem die allgemeine Form aussprechen nämlich

Jede Invariante und Covariante einer Formengr. kann ist durch blosse successive Anwendg des Ueberschiebungsprocesses darstellbar.

Wie der Satz zu verstehen ist bedarf wohl nach dem Früheren eine:

$$(f,g)^{(g)} = (f, C^{(g-1)})_i + (f, C^{(g-1)})_j + \dots .$$

Der Beweis kann symbolisch geführt werden und beruht dann auf dem Satze in § 20 von der Darstellg einer Covariante mit 2 Variablen siehe. vgl. Ueberschiebungen linearer Formen. Ich werde hier nicht ausführlicher darauf ein.

gehen, da wir ja seine Richtigkeit an den bisherigen Beispielen erkannt haben.

§ 23. Ueber die Anzahlen der Invariante Gebilde.

Ich. H. Jede mathematische Disciplin besitzt gewissermassen ihre zahlentheoretische Seite, indem sie vorwiegend mit den in Rede stehenden Anzahlen der (ausgezeichneten) Gebilde, der möglichen Lösungen und dergleichen gefragt wird. Ich erinnere z. B. an die Geometrie an sich eine ganz neue Reihe, und zwar der sogenannte Abzählung (Calcul der abzählenden Geometrie ausgebildet hat u. s. f. Wir wollen in gegenwärtigen § uns mit den einfachsten theoretischen Anzahlen beschäftigen und zwar so, dass wir der Reihe nach von einfachen zu verschiedenen (mehrfachen) Standpunkte stellen von den verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen:

1.) Wir betrachten eine Grundform f n-ter Ordnung und ihre Invarianten:

$$I_1, I_2, I_3, \ldots$$

und fragen uns, wie viel algebraisch von einander unabhängige Invarianten existieren können. Wir benutzen dazu den Gedanken einer speziellen Transformation d. h.

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n \qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' \\ x_2 &= \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' \end{aligned}$$

$$f' = a_0' x_1'^n + \binom{n}{1} a_1' x_1'^{n-1} x_2' + \ldots a_n' x_2'^n$$

$$a_0' = a_0 \alpha_{11}^n + \binom{n}{1} a_1 \alpha_{11}^{n-1} \alpha_{21} + \ldots + a_n \alpha_{21}^n$$

$$a_n' = a_0 \alpha_{12}^n + \binom{n}{1} a_1 \alpha_{12}^{n-1} \alpha_{22} + \ldots + a_n \alpha_{22}^n$$

Wir wählen nun die Substitution spezifisch so, dass

$$a_0' = 0 \qquad a_n' = 0 \qquad a_1' = 1 \qquad \delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} = 1$$

wird. Dann gibt die Definition weiterer Invariante:

$$I_1 = I_1(a_1' a_2' \ldots a_{n-1}')$$

Ebenso
$J_2 = J_2(a_2' \ldots a_{n-1}')$ (derselben)

d. h. Jede Invariante hängt von $n-2$ willkürlichen Parametern ab. oder zwischen $n-1$ bestehen eine Algebraische Relation.

Die Grundform n^{ter} Ordnung besitzt genau $n-2$ algebraisch unabhängige Invarianten Derselben für $n = 3, 4$, endlich auch für $n = 5, 6$, wo das Quadrat der rechten gleich einer rat. Funktion der übrige ist, also die Algebraische Abhängigkeit vorliegt. (vgl. § 15) Für $n = 2$ kann die gefundene Zahl natürlich nur reduziert werden, wir können in diesem Falle nämlich nur schließen dass zwischen 2 Invarianten eine alg. Relation bestehen muss, oder dass höchstens eine Invariante existiren kann wie es auch in der That ist.

Wir verlassen nun diesen Standpunkt und suchen auch die Zahl der Covarianten mit in Ueberlegung. Wir haben in § 9 einen fundamentalsatz kennen gelernt, welcher aussagt, dass jede

Invariante und Covariante einer Grundform n^{ter} Ordnung sich in der Gestalt

$$J \text{ u. } C = \frac{G(f, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n)}{f^{\mu}}$$

Dass zwischen f, φ_2, φ_3 umgekehrt keine algebraische Idendität bestehen ersieht man aus den ev. Quellen.

Also: Die Grundform f besitzt ausser ihr selbst genau $n-1$ rational unabhängige Covarianten.

Endlich können wir fragen, welches sind diejen Invarian Covarian

$J_1 \; J_2 \ldots \quad C_1 \; C_2 \ldots$

durch die sich jede andere rational ausdrücken lässt. Diese Frage ist weit schwieriger und sie ist von Gordan, wenn auch nur zum kleinsten Theile erledigt. Ich kann nur hier auf die Gordanschen Betrachtung ganz und gar nicht genauer eingehen, da sie enorme symbolische Rechnungen erfordern. Doch lassen sich seine Resultate sehr einfach aussprechen. Gordan geht von dem Satze aus, dass alles durch Ueber-

schiebungen zu erreichen ist. Er bildet nun alle denkbaren Ueberschiebungen und schaltet diejenige aus, welche bereits durch Erhaltene rational ausdrückbar sind. Auf diese Weise gelingt es ihm zu zeigen, dass er die überschiebene Operation einmal abbricht d. h. die Endlichkeit des Formensystems in diesem Sinne erwiesen. Und das ist sein Hauptsatz:

Es giebt für eine Gruppe ein endliches System von Invarianten und Covarianten, durch welche sich alle anderen Invarianten und Covarianten jener Formensysteme ganz und rational ausdrücken lassen.

Gordan sagt an, dabei gleichzeitig, wie man zu einem solch vollständigen Formensystem gelangen kann. Doch ist die Methode so complicirt, dass man

die nur in den ersten Fällen bis $n = 8$ hat anwenden können. Wir haben das vollständige Formensystem für $n = 1, 2, 3, 4$ aufgestellt und für $n = 5$, $n = 6$ noch in § 15 noch die Invarianten angegeben. Wir begnügen uns mit den genannten Angaben, da die gewaltig angeschwollene Litteratur doch nur weitere Beispiele für die eintönigste und trockenste symbolische Rechnung liefert. Das wichtige und fundamentale ist allein jener Satz von der Endlichkeit der Formensysteme.

Neben dieser Gordanschen Schule ging parallel damit die Cayley-Sylvester-Hermitesche Abzählungstheorie. Ich möchte hier nur das Fundamentaltheorem dieser Theorie ableiten, um die Richtung anzudeuten.

$$\text{Invar. } C = \sum_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \ldots a_n^{\nu_n}$$

$$DC = 0$$

Die Z sind in der Zahl $Z(n,g,p)$ Die Bedingg sind in der Zahl $Z(n,g,p-1)$. Folglich giebt es

$$Z(n,g,p) - Z(n,g,p-1)$$

linear unabhängige Covarianten. Das ist der fragliche Satz:

Die Anzahl der linear unabhängigen Covarianten eines Tors n der Ordnung g vom Gewichte p und Grade g und dem Gewichte p ist $Z(n,g,p) - Z(n,g,p-1)$.

Zu bemerken ist, dass nur die linear Unabhängigen Rolle in Frage kommt, also die Gebilde somit sich nicht selbst reducieren können, ferner geben wir der Zahl somit die Bedeutg als die Zahl der Lösungen der diophantischen Aufgabe:

$$\nu_0 + \nu_1 + \ldots \nu_n = g$$

$$\nu_1 + 2\nu_1 + \ldots \nu_n = p$$

d. h. die Anzahl, wie oft eine Zahl p aus g Zahlen der Reihe $0, 1, 2, 3 \ldots n$ mit unbedingter Wiederholung zusammengesetzt werden kann.

Sylvester hat nicht die Endlichkeit zu beweisen vermocht, aber wesentliche und allgemeine Reduktion in den nach der Gordanschen Methode aufgestellten Covariantensystem x ermöglicht.

x Auf unsymbolischem Wege ist er Merten in Crelle 100 gelungen, ~~[illegible]~~ umständlich

Zum x Schluss dieses § ~~[illegible]~~ beweisen wir den folgenden äusserst eleganten und ~~[illegible]~~ überraschenden Satz von Hermite:

Die Zahl der Covarianten vom Grade g ~~[illegible]~~ und dem Gewichte p ~~[illegible]~~ einer Grundform von der Ordnung n ist gleich der Zahl der Covar. vom Grade ~~[illegible]~~ ~~für eine Grundform der Ordnung g~~ n und demselben Gewichte p für eine Grundform der Ordnung g.

Zum Beweise combiniren wir zwei Darstellungen der invarianten Gebilde nämlich die durch Wurzeln der Gleichung und die Symbolische:

$$f = (x - \omega_1)(x - \omega_2) \cdots (x - \omega_n)$$
$$= a_x^n = b_x^n = c_x^n$$

Erinnern wir uns der ersteren Darstellungsweise in §17. Der Satz hiess:

$$\sum (\omega_\varrho - \omega_\sigma)^\sigma (\omega_\tau - \omega_\varrho)^\tau \cdots (x - \omega_\tau)^\xi (x - \omega_\sigma)^\eta \cdots$$

$$\sigma + \tau + \cdots = p$$

Jede Wurzel musste gleichoft vorkommen und dieser gemeinsame Grad war dann $= q$. Im ganzen n Wurzeln.

Diese Darstellung zeigt eine sehr merkwürdige Analogie mit der Symbolische Schreibweise:

$$\sum (ab)^\sigma (ax)^\tau \cdots a_x^\xi b_x^\eta$$

$$\sigma + \tau + \cdots = p$$

Der gemeinsame Grad war n. Im Ganzen q Symbole.

d. h. Wenn sich in der Normaldarstellung eine Covariante findet, so kann sich daraus eine Covariante in symbolischer Darstellung herleiten für eine Grundform von der Ordn. g, welche den Grad n hat, nun umgekehrt die Zahl Σ also wegen der eindeutigen Entsprechens dieselbe. Gewicht und Ordnung der sich entsprechenden Covarianten sind ungeändert geblieben.

Uebrigens noch eine Bemerkung. Erinnern wir uns dass wir nach dem Sylvesterschen Abzählungsverfahren fanden für jene Zahl:

$$\Sigma(n, g, p) - \Sigma(n, g, p-1)$$

es folgt:

$$= \Sigma(g, n, p) - \Sigma(g, n, p-1)$$

und in der That lässt sich direkt nachweisen dass $\Sigma(n, g, p) = \Sigma(g, n, p)$, wenn man eben die Zahlen theore-

Strenge Definition der Zahlen $\Sigma(n,s,p)$ bevorsteht richtig!

Handelt es sich nun um Verallgemeinerung auf linientreue Systeme, so hat man:

Prinzip für das Hermite'sche Reciprocitätsgesetz:

1.) $n+N-1$ algebraisch unabhängige Invarianten.
2.) $\frac{1}{2}n+N$ rational unabhängige Invarianten und Cov.
3.) Der Jordan'sche Satz gilt. ~~Der Beweis ist nicht unterschied~~

Cayley und Sylvester sowie Hermite's Satz ist durch Gruppe unterschied.

§ 24. Die typische Darstellung der Grundformen.

Schon im vorigen § benutzten wir das sogenannte Prinzip der speziellen Transformation. Da wir hier in der Invariantentheorie alle Gebilde, die durch lineare Transformation auseinander hervorgehen, als untereinander gleichberechtigt auffassen, so ist es gleichgültig, welche spezielle Gestalt wir von diesen unendlich vielen zu Grunde.

legen. Wir wählen unter solche Gebilden, welche für den frag. lichen Fall die geeignetste ist. Beispielsweise wohin, wo $a_0' = 0$ $a_n' = 0$ u. s. w. Doch giebt es auch gewisse ausgezeichnete Transformationen, welche wir jetzt behandeln wollen, nämlich die sogenannten Typischen Transformationen.

Wir behandeln, um den Begriff der typischen Darstellg klar zu machen, den einfachsten und wichtigsten Fall:

Anhang zu § 23.

M. H. Bevor wir weitergehen darf ich mir wohl erlauben auf den ersten anzahltheoretischen Satz von § 23 noch einmal zurückzukommen. Derselbe hiess: ——— * In diesem Satze liegen zwei Behauptungen 1.) spricht mehr als n-2 Inv. 2.) Sie besitzt soviel alg. unabhängige Invarianten. Den ersten Theil des Satzes hatten wir wie fest bewiesen.

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' \\ x_2 = \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' \end{cases}$$

$$f' = a_0' x_1'^n + \binom{n}{1} a_1' x_1'^{n-1} x_2' + \cdots + a_n' x_2'^n$$

$$a_0' = (a_0 \alpha_{11}^n + \binom{n}{1} a_1 \alpha_{11}^{n-1} \alpha_{21} + \cdots + a_n \alpha_{21}^n) = f(\alpha_{11}, \alpha_{21})$$

$$a_1' =$$

Es war dann:

$$a_0' = a_0 \alpha_{11}^n + \binom{n}{1} a_1 \alpha_{11}^{n-1} \alpha_{21} + \cdots + a_n \alpha_{21}^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n' = a_0 \alpha_{12}^n + \binom{n}{1} a_1 \alpha_{12}^{n-1} \alpha_{22} + \cdots + a_n \alpha_{22}^n$$

Wir konnten nun die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11} \ldots$ so wählen, dass $a_0' = a_n' = 0$ $a_1' = 1$ $\delta = 1$ wurde. Dann war vermöge der Definitionsgleichung

$$I = I(a_2' \ldots a_{n-1}')$$

d. h. zwischen $n-1$ Invarianten besteht eine Algebraische Relation. Es war also nur noch der zweite Theil zu beweisen, dass es in der That auch $n-2$ unabhängige Invarianten giebt und dieser Beweis lässt sich in der That genau so

führen, wie er mir bereits ~~bei früher~~ neulich vorschwebte. Um ihn strenge zu führen, ist es nöthig die a' ausführlich zu berechnen:

$$f = a_x^n = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = \{a_1(\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2') + a_2(\alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2')\}^n$$

$$= \{(a_1 \alpha_{11} + a_2 \alpha_{21}) x_1' + (a_1 \alpha_{12} + a_2 \alpha_{22}) x_2'\}^n$$

Führe ich nun die Bezeichnungen:

$$\alpha_{11} = \xi_1 \quad \alpha_{21} = \xi_2$$

$$\alpha_{12} = \eta_1 \quad \alpha_{22} = \eta_2$$

ein, so:

$$f' = \{a_\xi x_1' + a_\eta x_2'\}^n = a_\xi^n x_1'^n + \binom{n}{1} a_\xi^{n-1} a_\eta x_1'^{n-1} x_2' + \dots a_\eta^n x_2'^n$$

Also:

$$a_0' = a_\xi^n$$

$$a_1' = a_\xi^{n-1} a_\eta$$

$$\vdots$$

$$a_n' = a_\eta^n$$

Dies stimmt auch genau mit den früheren Ausdrücken.

$a_0' = 0$ d. h. $\alpha_{11} = \xi_1 = \mu\omega_i$ $\alpha_{21} = \xi_2 = \mu$

$\alpha_{12} = \eta_1 = \lambda\omega_k$ $\alpha_{22} = \eta_2 = \lambda$

$$\lambda\mu\omega_i^2 - \lambda\omega_k = 1$$

$$\lambda\mu = \frac{1}{\omega_i - \omega_k}$$

$$a_1' = (a_1\omega_i + a_2)^{n-1}(a_1\omega_k + a_2)\mu^{n-1}\lambda^k = 1$$

d. h. $$\mu^{n-2} = \frac{\omega_i - \omega_k}{(a_1\omega_i + a_2)^{n-1}(a_1\omega_k + a_2)}$$

$$\mu = \sqrt[n-2]{\frac{\omega_i - \omega_k}{(a_1\omega_i + a_2)^{n-1}(a_1\omega_k + a_2)}} \qquad \lambda = \frac{1}{(\omega_i - \omega_k)\mu}$$

Ich behaupte nun, wie ich es schon damals als Vermutung aussprach dass $a_2' \ldots a_{n-1}' \ldots$ Irrationale ~~Irrationale~~ Invariante sind:

$$a_i' = (a_1\omega_i + a_2)^{n-i}(a_1\omega_k + a_2)^i \mu^{n-i}\lambda^i$$

$$A_i' = \{(a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21})\omega_i + (a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22})\}^{n-i}$$

$$\{(a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21})\omega_k + (a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22})\}^i$$

$$(a_1\omega_i + a_2)^{n-i}(a_1\omega_k + a_2)^i$$

Um [illegible] hier zu beweisen untersuchen wir wie sich

1.) $\omega_i - \omega_{11}$: $\dfrac{\alpha_{22}\omega_i - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \omega_i \alpha_{21}} - \dfrac{\alpha_{22}\omega_{11} - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \omega_{11}\alpha_{21}} = \dfrac{\delta(\omega_i - \omega_{11})}{(\alpha_{11} - \omega_i \alpha_{21})(\alpha_{11} - \omega_{11}\alpha_{21})}$

2.) $(a_1\omega_i + a_2)^{n-i} / (a_1\omega_{11} + a_2)^i$:)

findet

$$\left\{(a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21})\frac{\alpha_{22}\omega_i - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \omega_i\alpha_{21}} + a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22}\right\}^{n-i} \left\{(a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21})\left(\frac{\alpha_{22}\omega_{11} - \alpha_{12}}{\alpha_{11} - \omega_{11}\alpha_{21}}\right) + a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22}\right\}^i$$

$$\left\{\frac{\delta(a_1\omega_i + a_2)}{\alpha_{11} - \omega_i\alpha_{21}}\right\}^{n-i} \left\{\frac{\delta(a_1\omega_{11} + a_2)}{\alpha_{11} - \alpha_{21}\omega_{11}}\right\}^i = \frac{\delta^n (a_2\omega_i + a_2)^{n-i}(a_1\omega_{11} + a_2)^i}{(\alpha_{11} - \omega_i\alpha_{21})^{n-i}(\alpha_{11} - \alpha_{21}\omega_{11})^i}$$

Im Ganzen also:

$$a_i' : a_i' \frac{\delta^n}{(\alpha_{11} - \omega_i\alpha_{21})^{n-i}(\alpha_{11} - \alpha_{21}\omega_{11})^i} \frac{\delta^{\frac{n-2i}{n-2}(n-1)}(\alpha_{11} - \omega_i\alpha_{21})^{\frac{n-2i}{n-2}}(\alpha_{11} - \alpha_{21}\omega_{11})^{\frac{n-2i}{n-2}}}{(\alpha_{11} - \omega_i\alpha_{21})^{\frac{n-2i}{n-2}}(\alpha_{11} - \omega_{11}\alpha_{21})^{\frac{n-2i}{n-2}}}$$

$$= a_i' \delta^{n + \frac{n-2i}{n-2} - i} \left\{\frac{(\alpha_{11} - \omega_i\alpha_{21})(\alpha_{11} - \alpha_{21}\omega_{11})}{\delta}\right\}^i \cdot \frac{(\alpha_{11} - \omega_i\alpha_{21})^i (\alpha_{11} - \omega_{11}\alpha_{21})^i}{\delta^i}$$

Wir bilden nun aus a_i' nach §18 die entsprechenden rationalen Invarianten:

$$(1-[a_i']_1)(1-[a_i']_2)\ldots(1-[a_i']_3)\ldots$$

$$v_i \quad s_i \quad t_i \ldots$$

Durch jene irrationalen Invarianten lässt sich nach dem Früheren alles rational ausdrücken:

$$J = R([a_i']_1) = R([a_i']_2)\ldots$$

$$J = ZRS([a_i']_1, [a_i']_2\ldots) = R(v_i, s_i, t_i\ldots)$$

Jede Invariante ist also rational durch die Fundamentalinvarianten $v_i, s_i, t_i\ldots$ ausdrückbar. Zwischen letzteren müssen aber soviel Relationen bestehen, dass nur noch $n-2$ unabhängig übrig bleiben. Soviel aber müssen übrig bleiben. Soviel die entsprechenden $(n-2)$ irrationalen Invarianten a_i' unabhängig sind. Die $n-2$ a_i' wären die alg. F. von $n-3$ Parametern, was unmöglich ist. Dies ist der vollkommen strenge und unanfechtbare Beweis für die früheren Behauptg. Ich habe übrigens in der Litteratur keinen strengen Beweis dafür gefunden und bin daher erfreut, dass mir Ihre Interpellation Veranlassung gab, selbst darüber nachzudenken.

Ende der Anlagen.

$$f = a_0 x_1^n + \dots + a_n x_2^n$$

$$\begin{array}{l|l|l} l = l_0 x_1 + l_1 x_2 & m_1 & m_0 \\ m = m_0 x_1 + m_1 x_2 & -l_1 & -l_0 \end{array}$$

$$m_1 l - l_1 m = (l,m)_1 x_1$$
$$-m_0 l + l_0 m = (l,m)_1 x_2$$

$$x_1 = \frac{1}{(l,m)_1}\{m_1 l - l_1 m\}$$
$$x_2 = \frac{1}{(l,m)_1}\{-m_0 l + l_0 m\}$$

$$f^{\nu\nu} = \frac{1}{(l,m)_1^n}\left\{T_0 l^n + \binom{n}{1} T_1 l^{n-1} m + \dots + T_n m^n\right\}$$

Die T sind rationale Funktion der $a_0 a_1 \dots a_n$ und zwar ganzzahlige Invarianten. Diese Darstellung mittelst Invarianten und Covarianten nennt man eine typische Darstellung. Beweis, dass die T (coefficienten f Invarianten sind:

$$f' = \frac{1}{\delta'^{\mu}(l,m)_1^n}\left\{T_0' \delta'^{\nu-\mu} l^n + \binom{n}{1} T_1' l^{n-1} m \delta' + \dots T_n' m^n \delta'^{\bar{\imath}}\right\}$$

d. T.
$$T_0 = \delta^{\nu-\mu} T_0'$$
$$T_1 = \delta^{s-\mu} T_1'$$
$$\dots$$
$$T_n = \delta^{\bar{\imath}-\mu} T_n'$$

d. h. die T sind Invarianten.
Ebenso verfährt man bei mehreren Grundformen.
Wir wollen das einfachste Beispiel einer typischen Darstellung durchrechnen.

$$f = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

$$l = l_0 x_1 + l_1 x_2$$

Diese haben das vollständige Formensystem wie § 13:

$$n = \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 x_1 + \mathfrak{I}_1 x_2 \qquad \mathfrak{I}_0 = a_0 l_1 - a_1 l_0$$
$$\mathfrak{I}_1 = a_1 l_1 - a_2 l_0$$

$$h = a_0 a_2 - a_1^2 \qquad r = a_0 l_1^2 - 2 a_1 l_0 l_1 + a_2 l_0^2 = (\mathfrak{I}, l)_1$$

$$x_1 = \frac{1}{r}\{\mathfrak{I}_1 l - l_1 \mathfrak{I}\}$$
$$x_2 = \frac{1}{r}\{-\mathfrak{I}_0 l + l_0 \mathfrak{I}\}$$

$$f = \frac{1}{r^2}\{a_0(\mathfrak{I}_1 l - l_1 \mathfrak{I})^2 + 2a_1(\mathfrak{I}_1 l - l_1 \mathfrak{I})(-\mathfrak{I}_0 l + l_0 \mathfrak{I}) + a_2(\mathfrak{I}_0 l - l_0 \mathfrak{I})^2$$
$$= l^2[a_0 \mathfrak{I}_1^2 - 2a_1 \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_0 + a_2 \mathfrak{I}_0^2]$$
$$+ l\mathfrak{I}[-2a_0 \mathfrak{I}_1 l_1 + 2a_1(\mathfrak{I}_1 l_0 + l_1 \mathfrak{I}_0) - 2a_2 \mathfrak{I}_0 l_0]$$
$$+ \mathfrak{I}^2[a_0 l_1^2 - 2a_1 l_1 l_0 + a_2 l_0^2]\}$$
$$= h r l^2 \cdot 1 + r \mathfrak{I}^2 := \frac{h}{r} l^2 + \frac{1}{r} \mathfrak{I}^2$$

Für eine einzige Form wird das einfachste Beispiel die Grundform s ter Ordnung.

$$l = (i,f)_2$$

$$m = (i,l)_1$$

¶ Eine solche typische Darstellung ist aber offenbar nicht immer möglich, nämlich immer dann nicht wenn die Grundform keine zwei lineare Covariante besitzt, was immer für Grundform gerader Ordnung eintritt. Dann hat man Uebergänge zu zwei verschiedenen Normformen gefunden.

1.) Man nimmt eine Covariante von 2 Variabelenreihe also etwa $= x_1 y_2 - x_2 y_1$

$$l = C(x_1^1 x_2^1, y_1 y_2) = \left(\frac{\partial f(y_1,y_2)}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial f(y_1,y_2)}{\partial y_2} x_2\right)^2$$

$$m = C(x_1^{(1}, x_2^{1)}, y_1, y_2) = \frac{1}{n}\left\{x_1 \frac{\partial f(y_1,y_2)}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f(y_1,y_2)}{\partial y_2}\right\}$$

$x_1 = \frac{1}{f}\left\{\frac{1}{n}\frac{\partial f_{xy}}{\partial y_2} l + y_2 m\right\}$; $x_2 = \frac{1}{f}\left\{\frac{1}{n}\frac{\partial f_{xy}}{\partial y_1} l + y_2 m\right\}$

$$\varphi = \frac{1}{f^n}\left\{T_0 l^n + \cdots + T_n m^n\right\}$$

und werden assoziirte Formen genannt

T sind nun Covariante der Variablenreihe $y_1 y_2$.

Als Beispiel diene die cubische Form:

$$f = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

$$x_1 = \frac{1}{l}\{a_1 y_1 l + m y_1\}$$

$$x_2 = \frac{1}{l}\{-a_0 y_1 l + m y_2\}$$

$$\frac{1}{l^3}\Big\{a_0 (a_1 y_1 l + m y_1)^3 + 3 a_1 (a_1 y_1 l + m y_1)^2 (-a_0 y_1 l + m y_1) + 3 a_2 (a_1 y_1 l + m y_1)(-a_0 y_1 l + m y_1)^2 + a_3 (-a_0 y_1 l + m y_1)^3\Big\}$$

$$= \frac{1}{l^3}\Big\{l^3 (a_0 a_1^3 + 3 a_1^2 a_0 + 3 a_2 a_1 a_0^2 + a_3 a_0^3) y_1^6$$

$$+ l^2 m (3 a_0 a_1^2 + 6 a_1^2 a_0 + 3 a_2 a_0^2) \quad | y_1^5$$

$$+ l m^2 (3 a_0 a_1 + 3 a_1 a_0) \quad | y_1^4$$

$$+ m^3 (a_0 \quad | y_1^3\Big\}$$

$$T = 3 a_0 a_1 a_2 - a_0^2 a_3 - 2 a_1^3$$

$$= f T l^3 + 3 f h l^2 m + f m^3$$

$$= \frac{1}{l^2}\{T l^3 - 3 h l^2 m + m^3\}$$

f, h, T sind die assoziirten Formen.

Einen noch engeren Zusammenhang erhält diese Typische Darstellg mittelst Covariante mit der früheren durch Covarianten, wenn ich an die schon früher ~~Erwähnte~~ gemachte Bemerkung erinnere, dass eine Covariante.

$$(i_{x_1 x_2}(a_0 a_1 \ldots a_n x_1' x_2')$$

eine Simultaninvariante von f und $F = A_0 x_1' + A_1 x_2'$ wird wenn ich einsetze:

$$(i(a_0 a_1 \ldots a_n, \ldots - A_1, A_0)$$

Natürlich wird aus einer Covariante:

$$(i(a_0 a_1 \ldots a_n, x_1', x_2', y_1 y_2)$$

1.) $(i(a_0 a_1 \ldots a_n, x_1' x_2', -A_1, A_0)$

2.) $(i(a_0 a_1 \ldots a_n - A_1, A_0, -A_1, A_0)$

Aus der identischen Covarian (xy) wird $A_0 y_1 + A_1 y_2$

Aus $x_1' \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2' \frac{\partial f}{\partial y_2}$: $A_0 \frac{\partial f}{\partial y_2} - A_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}$

Wir können also mit Adjunktion einer neuen linearen

Form $A_0 y_1 + A_1 y_2$ auf den früheren Fall zurück. Doch dies nur beiläufig.

Den zweiten Weg darf ich nur andeuten. Statt 2er Linearformen 3 quadratische:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \mathfrak{L}_0 x_1^2 + 2\mathfrak{L}_1 x_1 x_2 + \mathfrak{L}_2 x_2^2 \\ \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}_0 x_1^2 + \mathfrak{M}_1 x_1 x_2 + \mathfrak{M}_2 x_2^2 \\ \mathfrak{N} &= \mathfrak{N}_0 x_1^2 + \mathfrak{N}_1 x_1 x_2 + \mathfrak{N}_2 x_2^2 \end{aligned}$$

Hieraus wird x_1^2, $x_1 x_2$, x_2^2 herausgerechnet und dann f selber:

$$f = R(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$ vom $\frac{n}{2}$ ter Ordnung mit Invarianten als Coefficienten.

Als Anwendung der typischen Darstellung erwähne ich nur die Folge, dass alle Invarianten und Covarianten sich als rationale Functionen der Coefficienten der typischen Darstellung ausdrücken lassen müssen. Es folgt hier nunmehr

bar für die typische Darstellung mittels linearer Covarianten. Denn

$$T(a_0 a_1 \dots a_n) = \frac{1}{(1,n)_p} T(T_0 T_1 \dots T_n)$$

$$C(a_0 a_1 \dots a_n) = \frac{1}{(1,n)_p} C(T_0 T_1 \dots T_n (1,n))$$

Doch ist dies kein wesentlicher Fortschritt, wenigstens nicht in dem Falle, wo T Covariante sind. Denn wir haben zu Anfang in dem Fundamentaltheorem eine Reihe einfacherer und allgemeiner angebbarer Covarianten aufgestellt, durch die sich alle anderen linear. Uebrigens könnten wir hiermit auch den Nachweis der Existenz $n-2$ algebraisch unabhängiger Invarianten führen. Doch ist dies ein Umweg und erfordert auch die strenge Begründung für

die Existenz 2ter unabhängiger ~~Invar.~~ linearer ~~x~~ resp. 3er unabhäng. quadratischer Covarianten. war ~~x~~ von Clebsch bewiesen wird. Im Falle quadratischer Covarianten ist jene Rationale Darstellungbarkeit nicht so direkt einzusehen. Endlich beweist Clebsch mit Hülfe der typischen Darstellung, den Satz: ~~dass~~ zwei ~~jede~~ Formen mit gleichen absoluten Invarianten und je 2 linearen resp. 3 quadratischen unabhängige Covarianten sind linear in einander überzuführen. Statt gleichen absoluten Invarianten kann man auch sagen, mit gleichen Invariantenverhältnissen, diese gehörig verstanden. Für je 2 lineare Formen ist der Satz leicht direkt einzusehen. Denn man hat dann die beiden vorgelegten Formen

$$f \quad \text{und} \quad g$$

mittelst jener beiden linearen Covarianten zu transformiren und gewinnt dann die typische Darstellung.

$$T_f = T_g = T$$

d. h. Die beiden Formen sind in dieselbe Form zu transfor-

(Margin note: Endlich bewiesene Formen beiden Typ. Darst.)

wissen und daher auch unter sich äquivalent. Für die Existenz je dreier quadrat. Formen ist der Satz dann ähnlich zu führen.

Was die Bedeutung des Satzes betrifft, so könnten wir erwarten, dass die Gleichheit aller absoluten Invarianten einer für die Transformirbarkeit hinreicht. Denn $n-3$ Bedingungen. Dieser Satz behauptet, dass noch 6 lineare quadratische Invarianten existiren müssen und in der That, verschwinden diese (in Folge der speciellen Coefficient d. Form), so ist es möglich, dass die Formen nicht in einander überführbar sind trotz der Uebereinstimmung aller ihrer Invarianten. Als Beispiel diene:

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots \binom{n}{\frac{n}{2}+1} a_{\frac{n}{2}+1} x_1^{\frac{n}{2}-1} x_2^{\frac{n}{2}+1}$$

Es ist dass also eine Form, welche die Wurzel $x_1 = 0$ $\frac{n}{2}+1$ fach besitzt. Ich behaupte diese Form ist so ungleichheit, nur eine Invariante zu besitzen:

$$J = \sum \pm a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n} = \sum \pm a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_{\frac{n}{2}}^{\nu_{\frac{n}{2}}} \qquad \begin{matrix} \nu_0 + \nu_1 + \dots \nu_{\frac{n}{2}} = g \\ \nu_1 + 2\nu_2 + \dots \frac{n}{2}\nu_{\frac{n}{2}} = p \end{matrix}$$

$$p = \frac{ng}{2}$$

$$v_1 + 2v_2 + \cdots \frac{n}{2} v_{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} v_0 + \frac{n}{2} v_1 + \cdots \frac{n}{2} v_{\frac{n}{2}}$$

$$v_0 = v_1 = \cdots v_{\frac{n}{2}-1} = 0 \qquad v_{\frac{n}{2}} = g$$

$$J = 2 a_{\frac{n}{2}}^{g} \qquad J_1 = 2_1 a_{\frac{n}{2}}^{g_1}$$

$$\left(\frac{J_1}{2_1}\right)^g = \left(\frac{J}{2}\right)^{g_1} \quad \text{q. e. d.}$$

Zugleich sieht man, dass die Absoluten Invarianten

$$\frac{J_1^{g}}{J^{g_1}} = \frac{2_1^{g}}{2^{g_1}}$$

von $a_0, a_1, \ldots$ unabhängige Zahlen sind. Bilde ich also eine analoge Form

$$F = A_0 x_1^n + \binom{n}{1} A_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{\frac{n}{2}} A_{\frac{n}{2}} x_1^{\frac{n}{2}} x_2^{\frac{n}{2}}$$

so hat diese dieselben absoluten Invarianten, während von einer linearen Uebertragung nicht die Rede sein kann. Beiläufig bemerkt für $a_{\frac{n}{2}} = 0$ besitzt die Form gar keine Invarianten, es wäre die Frage, ob dies die einzigen Formen ohne Invarianten sind?

Eine wichtigere und einfachere Darstellungsweise der Grundform ist?

§ 25 Die Potenzdarstellung der Grundform

Wir werden auf diesen hochinteressante und fruchtbare Probleme naturgemäss geführt, wenn wir uns überlegen, dass die Potenz $f = l^n$ die stärkste Annäherung der allgemeinen Form darstellt und es daher nahe liegt die allgemeine Form als Summe solcher Annäherungen d.h. als Potenzsumme darzustellen also:

$$f = l_1^n + l_2^n + \dots l_r^n$$

Es sei nun n ungerade $= 2r-1$

$$l_1 = \dots + l_{11} x_1 + l_{12} x_2 = l_{11} x_1 + l_{12} x_2$$
$$l_2 = \dots + l_{21} x_1 + l_{22} x_2 = l_{21} x_1 + l_{22} x_2$$

Die Zahl der Constanten stimmt d.h. die Zahl der

Gleichung = der Zahl der Unbekannten. Es fragt sich, ob diese Darstellung immer möglich ist, und wie oft sie es ist? Zu dem Zwecke thun wir successive folgende Schritte:

Wir hatten gelegentlich entdeckt der Methode der einseitig derivirten in § 19 das Resultat gefunden, dass

$$(f,\varphi)_r = 0 \qquad f = l^n \qquad \varphi = l\,\varphi^{(r-1)}$$

ein Resultat, welches auch leicht direkt zu verifiziren ist.

$$(f,\varphi)_r = f_0\varphi_r + \binom{r}{1} f_1\varphi_{r-1} \ldots \pm f_r\varphi_0 = 0$$

Hier ist doch eine lineare Differentialgleichung der r ten Ordnung für φ. Wir kennen ein Integral derselben $\varphi = l_1^n$, $\varphi = l_2^n \ldots$

$$\varphi = c_1 l_1^n + c_2 l_2^n + \ldots c_r l_r^n$$

wird das allgemeine Integral sein, mit den nothwendigen r Integrations-constanten,

IV

Dr. Hilbert

219.

Colleg, Invariantentheorie.

Klarastrasse 10.

wenn wir nur nachweisen können, dass die n^{ten} Potenzen ~~der~~ von einander linear unabhängig sind. Dies ist in der That leicht möglich. Sei bestehe eine Relation:

$$c_1 l_1^n + c_2 l_2^n + \ldots c_\nu l_\nu^n = 0$$

$$c_1(l_{11}x_1 + l_{12}x_2)^n + c_2(l_{21}x_1 + l_{22}x_2)^n + c_\nu(l_{\nu 1}x_1 + l_{\nu 2})^n = 0$$

$$c_1 l_{11}^n + c_2 l_{21}^n + \ldots c_\nu l_{\nu 1}^n = 0$$

$$c_1 l_{11}^{n-1} l_{12} + c_2 l_{21}^{n-1} l_{22} + \ldots c_\nu l_{\nu-1}^{n-1} l_{\nu 2} = 0$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

d. h. ~~Alle~~ ~~die Determinanten~~ Alle ν reihigen Determinanten müssen verschwinden, was nur möglich ist für das Existenzgebiet zweier Linearformen. Dann aber haben wir nur $\nu-1$ verschiedene Potenzen. Wir setzen die Linearfaktoren von φ verschieden voraus und haben dann das Resultat. Jedes φ, ~~XXX~~ ist also ν gleiche Potenzsumme derselben, für welches

$$(\varphi, \varphi)_\nu = 0$$

existirt. Es fragt sich nun, ob wir für ein vorgelegtes

f immer ein solches φ construiren können und das ist in der That möglich.

$$(f,\varphi)_\nu = (a_0\alpha_\nu - \binom{\nu}{1} a_1 \alpha_{\nu-1} \cdots \pm a_\nu \alpha_0) x_1^{\nu-1} + \cdots = 0$$

repräsentirt ν Bedingungen für die $\nu+1$ homogenen Coefficienten von φ. Wir wollen φ wirklich allgemein aufstellen:

$$\begin{aligned}
&a_0\alpha_\nu - \binom{\nu}{1} a_1 \alpha_{\nu-1} + \cdots \pm a_\nu \alpha_0 = 0\\
&a_1\alpha_\nu - \binom{\nu}{1} a_2 \alpha_{\nu-1} + \cdots \pm a_{\nu+1}\alpha_0 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{\nu-1}\alpha_\nu - \binom{\nu}{1} a_\nu \alpha_{\nu-1} + \cdots \pm a_{2\nu-1}\alpha_0 = 0\\
&x_2^\nu \alpha_\nu + \binom{\nu}{1} x_2^{\nu-1} x_1 \alpha_{\nu-1} + \cdots \pm x_1^\nu \alpha_0 = \varphi
\end{aligned}$$

d.h.

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_\nu \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{\nu+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu-1} & a_\nu & \cdots & a_{2\nu-1} \\ x_2^\nu & -x_2^{\nu-1}x_1 & \cdots & \pm x_1^\nu \end{vmatrix}$$

aus welcher Form wir die Quelle sofort entnehmen können. φ ist eine Covariante weil wir sie in Problemstellung wie in Behandlungsweise der invarianten Charakter verleugnet haben. Aber es ist auch leicht streng zu beweisen. Die Potenzdarstellung gestaltet sich nun wie folgt: Construktion der Covariante φ, Faktorzerlegung, Bestimmung der Constanten c_i, die wir auch nachträglich in die Potenz hineinziehen können. Die Potenzdarstellung ist nur auf eine Weise möglich, was sehr merkwürdig ist, denn die Gleichung sind doch bei direkter Betrachtung complicirt und von höheren Grade. Beispiel $n=3$.

$$f = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = l_1^3 + l_2^3$$

$$\varphi = h = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + \cdots = \text{Const.} (x_1 - \alpha_1 x_2)(x_1' - \alpha_2 x_2')$$

$$f = c_1 (x_1' - \alpha_1 x_2')^3 + c_2 (x_1' - \alpha_2 x_2')^3 = \frac{f(\alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)^3} (x_1' - \alpha_1 x_2')^3 + \frac{f(\alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)^3} (x_1' - \alpha_2 x_2')^3$$

$$f(\alpha_1) = c_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^3$$

$$f(\alpha_2) = c_1 (\alpha_2 - \alpha_1)^3$$

Das Verhältniss $-\frac{c_1}{c_2}$ wird $= \frac{\omega_1 - \alpha_2}{\omega_1 - \alpha_1} = \frac{\omega_2 - \alpha_2}{\omega_1 - \alpha} = \frac{\omega_3 - \alpha_2}{\omega_3 - \alpha_1}$

wie es genau mit den in § 10 bei der Diskussion der cubischen Form erhaltenen Resultate übereinstimmt. Aber unsere jetzige Betrachtung ist viel allgemeiner und wir wollen sie auch $n = 5$ verwerten.

$$f = a_0 x_1^5 + \dots + a_4 x_2^5 = l_1^5 + l_2^5 + l_3^5$$

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} x_1^3 + \dots = l_1 l_2 l_3 = (x_1 - \alpha_1 x_2)(x_1 - \alpha_2 x_2)(x_1 - \alpha_3 x_2)$$

$$f = c_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^5 + c_2 (x_1 - \alpha_2 x_2)^5 + c_3 (x_1 - \alpha_3 x_2)^5$$

Wir denken uns die Linearformen l bestimmt und hinein gezogen, so dass:

$$f = l_1^5 + l_2^5 + l_3^5 \qquad \varphi = d_1^2 d_2^2 d_3^2 l_1 l_2 l_3$$

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= l_{11} x_1 + l_{12} x_2 \\ l_2 &= l_{21} x_1 + l_{22} x_2 \\ l_3 &= l_{31} x_1 + l_{32} x_2 \end{aligned}\right| \quad d_1 l_1 + d_2 l_2 + d_3 l_3 = 0$$

Alle Invarianten und Covarianten der Form müssen nun rein durch l_1, l_2, l_3 und d_1, d_2, d_3 ausdrückbar sein. Denn fasst man etwa l_1 und l_2 als neue Variablen auf, so

$$i = \dots = \dots$$

wird:

$$f = l_1^5 + l_2^5 - \left(\frac{d_1}{d_3} l_1 + \frac{d_2}{d_3} l_2\right)^5$$

$$= \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^5\right) l_1^5 - 5\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 \left(\frac{d_2}{d_3}\right) l_1^4 l_2 \pm \ldots + \left(1 - \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^5 l_2^5\right)$$

Daher die quadrat. Covariante

$$i = d_1^4 l_2 l_3 + d_2^4 l_1 l_3 + d_3^4 l_1 l_2$$

ferner die lineare Covariante:

$$(i,f)_2 = d_1^2 d_2^2 d_3^2 \left(d_1^6 l_1 + d_2^6 l_2 + d_3^6 l_3\right)$$

Die Schiefe Invariante ist:

$$J = d_1^{10} d_2^{10} d_3^{10} \left\{ d_1^{10} \left(d_3^5 + d_2^5\right) + d_2^{10} \left(d_1^5 - d_3^5\right) + d_3^{10} \left(d_2^5 - d_1^5\right) \right\}$$

Die Discriminante läßt sich besonders leicht in irrationaler Form aufstellen:

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial l_2} = 0 \qquad l_1^4 - \frac{d_1}{d_3} l_3^4 = 0$$

$$l_2^4 - \frac{d_2}{d_3} l_3^4 = 0$$

$$d_1 \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^{\frac{1}{4}} + d_2 \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^{\frac{1}{4}} + d_3 = 0$$

$$d_1^{\frac{5}{4}} + d_2^{\frac{5}{4}} + d_3^{\frac{5}{4}} = 0$$

$$\Delta = \Pi \left(d_1^{\frac{5}{4}} + d_2^{\frac{5}{4}} + d_3^{\frac{5}{4}}\right)$$

Die ~~irred~~ ν Grössen $d_1, d_2 \ldots d_\nu$ sind natürliche rationale Invarianten, wie auch direkt durch Anwendung einer linearen Transformation auf die Darstellung bewiesen wird.

Im Gegensatz zur typischen Darstellung nennt man diese die kanonische Darstellung der Grundform.

Es fragt sich zunächst, wie bei zweien oder einer Grundform und wie bei μ Grundformen gerader Ordnung.

Was den ersteren Punkt betrifft, so kann man im allgemeinen wie oben verfahren, sobald die Coëfficientenzahl der Darstellung mit der Coëfficientenzahl der Formen übereinstimmt.

Es sei das Verfahren an einem Beispiele erläutert:

$$\varphi = a_0 x_1^4 + \ldots a_4 x_1^4 = l_1^4 + l_2^4 + l_3^4$$

$$\chi = A_0 x_1^3 + \ldots + A_3 x_1^3 = c_1 l_1^3 + c_2 l_2^3 + c_3 l_3^3$$

Können wir eine Form φ der dritten Ordnung construiren, so dass

$$\left.\begin{aligned}(\Phi,\varphi)_3 &= 0\\ (F,\varphi)_3 &= 0\end{aligned}\right\}\ *$$

so muss jene Darstellung mittelst der linearen Faktoren von φ möglich sein. Dann sind aber 3 Gleichungen für die 3 wesentlichen Coefficienten von φ. Φ wird eine Simultaninvariante von f und F nämlich:

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ x_2^3 & -x_1 x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_2^3 \end{vmatrix} = \ell_1 \ell_2 \ell_3$$

In einer ausführlichen Erledigung wäre noch eine Untersuchung der Ausartungen nötig.

α) wenn φ zwei oder mehr gleiche Linearfaktoren hat. (Beispiel im Fall der F. 5ter Ordn.: Invariante Form)

β) wenn φ identisch verschwindet. Es zeigt sich dass dann die Grundform f als Potenzsumme von weniger Potenzen darstellbar ist, und dies ist umgekehrt die

Beispiel $f = (1_1^5 + 1_1^{15})^{(8)}$

hinreichende Bedingung. Obgleich diese Untersuchung sehr wichtig und interessant ist, so kann deshalb weder die hier systematische Zusammenstellung der möglichen Operationen gestatten, bis man zu der äussersten Anzahl, der eine Totenzahl gelangt, so kann ich hier nur Manches an Zeit nicht näher eingehen, glaube aber dass das Studium der bezüglichen Arbeiten mich meinen Andeutungen keine Schwierigkeiten haben kann. Für eine Grundform gerader Ordnung giebt es nun viele nur zwei verschiedene Darstellungsmittel. Ich möchte zunächst zeigen, wieso hier die Darstellung nicht in der früheren Weise sich gestalten. Setze ich an:

$$f = 1_1^n + 1_2^n + \dots 1_{2\nu}^n \qquad n = 2\nu$$

so habe ich zu wenig Coefficienten. Die Glieder

fügung noch einer Potenz zu viel Constante.
Man hilft sich auf zweierlei Weisen

1.) indem man es bei den ~~zu vielen~~ vorhandenen Constanten beruhen lässt $r = \frac{n}{2} + 1$ d.h. unendlich viele Darstellungen, von welchen man eine auswählen kann.

2.) indem man $r = \frac{n}{2}$ setzt aber noch ein Glied mit einer Constanten hinzufügt, welcher keine Potenz ist. Beispiel.

$$f = l_1^4 + l_2^4 + \lambda l_1^2 l_2^2$$

Dann ist die richtige Constantenzahl vorhanden. Um eine solche Darstellung ausführen zu können kommt es auf die Construktion der quadratischen Form

$$\varphi = l_1 l_2$$

an. Es ist aber

$$(f,\varphi)_2 = \lambda(\varphi^2,\varphi)_2 = 2\lambda(\varphi,\varphi)_2\varphi = \lambda'\varphi$$

d. h.:

$$\begin{aligned} a_0\alpha_2 - 2a_1\alpha_1 + a_2\alpha_0 + \lambda'\alpha_0 &= 0 \\ a_1\alpha_2 - 2a_2\alpha_1 + a_3\alpha_0 + \lambda'\alpha_1 &= 0 \\ a_2\alpha_2 - 2a_3\alpha_1 + a_4\alpha_0 + \lambda'\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 - \lambda' \\ a_1 & a_2 + \frac{\lambda'}{2} & a_3 \\ a_2 - \lambda' & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

d. h.

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda'^3}{2} + \frac{1}{2} i\lambda' + j &= 0 \\ \lambda'^3 - i\lambda' - 2j &= 0 \end{aligned}$$

Dar ist genau die früher bei der Diskussion der bigradratischen Form in § 10 erhaltene Gleichung. Es giebt 3 Werthe λ'. Jedem entspricht eine andere quadratische Form φ. Also sind 3 solche Darstellungen möglich. Die 3 quadratischen Formen sind früher genau behandelt. Im gegenwärtige

Falle ist also eine eindeutige Darstellung nicht möglich, sondern entweder unendlich vieldeutig oder endlich deutig. Ist jedoch eine Bedingung erfüllt $f = 0$ resp $\Delta = 0$ und f ist eindeutig als Summe reiner Potenzen darstellbar. Wir müssen uns hier mit diesem Beispiel begnügen und wegen des Weiteren darf ich mir wohl erlauben auf meine Habilitationsschrift im letzten Annalenhefte Bd. 28 Ueber eine allg. Gesichtsp. für invariantive Untersuchungen im binären Formengebiete. Dort wird eben gerade dieses Problem $(f, \varphi)_\lambda = 0$ φ allgemein behandelt, ~~Das Formensystem φ zu~~ Die determinirende Gl. aufgestellt. die Gesammtheit der Form φ in ihren gegenseitigen Beziehungen ~~studirt und~~ wo wir Δ die Invariante nicht.

Damit schliessen wir mit der Theorie der binären Formen ab. Wenngleich es natürlich nicht

möglich und auch gar nicht wünschenswert war, diese so weit verzweigte und besonders in neuerer Zeit so vielseitig behandelte Theorie in allen ihren Einzelheiten bis in das genaueste nachspürend hier verfolgen, so hoffe ich doch alle wesentlichen und fruchtbaren Gedanken der Theorie hervorgehoben und auch an einfachen Beispielen durchgeführt zu haben. Denn gerade die einfache Anwendbarkeit allgemein entwickelter Gedanken und die harmonische Abrundung allgemeiner Ideen auch in den speziellsten Spezialfällen ist ein Hauptreiz der algebraischen Invariantentheorie.

§ 1 Die Form
§ 2 Die lineare Transformation
§ 3 Begriff der Invariante

§4
§5
§6
§7
§8
§9
§10
§11
§12
§13
§14
§15
§16
§17
§19
§18
§20
§21

§ 4 Eigenschaften der Invarianten

§ 5 Die Operationssymbole D und Δ

§ 6 Bestimmung der Invarianten und Covarianten

§ 7 Gerade und schiefe Invarianten

§ 8 Die Grundformen der ersten bis vierten Ordn.

§ 9 Die Invarianten u Covariante zweiten und dritten Grades.

§ 10 Discussion und Faktorenzerlegung der cubischen und biquadratischen Grundform.

§ 11 Simultane Invarianten

§ 12 Simultaninvarianten zweiten Grades.

§ 13 Systeme linearer und quadratischer Formen.

§ 14 Covariante von Covarianten

§ 15 Die Invarianten der Form 5ten und 6ten Ordn.

§ 16 Die Combinante

§ 17 Die Invarianten und Covarianten als Functionen der Wurzeln

§ 19 Die Invarianten und Covarianten als Functionen der einfachen Differentialquotienten

§ 18 Die Begriffe der absoluten und der irrationalen Invarianten

§ 20 Symbolische Darstellung der Invarianten Covarianten

§ 21 Simultaninvarianten Bildung in symbolischer Darstellung.

§ 22 Die Reihe mit Symbole.

§ 23 Ueber die Anzahlen der invarianten Gebilde.

§ 24 Typische Darstellg der Grundformen

§ 25 Potenz Darstellg der Grundformen.

Diese 25 Ueberschriften repräsentiren ~~in gewisse~~ ~~Weise~~ einen in sich ~~methodisch~~ verbundenen und in ganzen harmonisch entwickelten Gedankenbau und er weist ~~dadurch~~ was an einen ähnliche Bau für die höhere Gebiete anzuführen, wobei er nahe liegen würde alle diese Gedanken zu übertragen. Aber dass dies geschehen möge ist bisher bloss Wunsch geblieben. Es sind in diesem Sinne mehr Lücken als ausgefüllt sind. Desto dankenswerter derjenige, welcher diese Abstand beseitigt.

§ 26. Die invarianten Gebilde der binären Gebiete.

Wie wir in § 1 schon allgemein ausgeführt haben, versteht man unter einer binären Form ein ganze rationale Funktion von 2 nicht homogene Variablen $f(x, y)$ oder von 3 homogenen Variable $f(x_1, x_2 x_3)$.

Wir schreiben letztere der binären Form analog:

$$f = a_{00} x_1^n + \binom{n}{1,0} a_{10} x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{0,1} a_{01} x_1^{n-1} x_3 + \binom{n}{2,0} a_{20} x_1^{n-2} x_2^2 + \dots$$

$$+ a_{0n} x_3^n$$

besitzt $\varphi(n,3) = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ Glieder.

$\binom{n}{i,k} = \frac{n!}{n-i-k! \cdot i! \cdot k!}$

a_{ik} vertritt a_{ki}

Diesem Ansatze entspricht es vollkommen, wenn wir zur symbolischen Schreibweise übergehen:

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = a_x^n \quad a_1^{n-i-k} a_2^i a_3^k = a_{ik}$$

Wir werden nun überhaupt der kürzeren Schreibweise wegen vorwiegend der symbolischen Methode bedienen und dabei von dem Prinzip den ausgiebigsten Gebrauch machen, wonach mit Symbolischen Potenzen und Produkten genau so zu rechnen ist wie mit wirklichen bei der einzigen Vorsicht, dass ~~die Ordnung~~ Grad eines ~~einen~~ jeden Symbols wie die Ordnung zu verstehen darf.

Wir bringen nun mit der allgemeinen Kenntnis

Form die allgemeine lineare Transformation
in Zusammenhang, wie dieselbe in § 2 behandelt
wurde:

$$x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' + \alpha_{13} x_3'$$
$$x_2 = \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \alpha_{23} x_3'$$
$$x_3 = \alpha_{31} x_1' + \alpha_{32} x_2' + \alpha_{33} x_3'$$

Wir haben schon damals ausgesprochen, dass
die Ordnung der Formen erhalten bleibt und in der
That:

$$f' = a_{00}' x_1'^n + \binom{n}{1,0} a_{10}' x_1'^{n-1} x_2' + \binom{n}{0,1} a_{01}' x_1'^{n-1} x_3' + \dots + a_{0\dots0n}' x_3'^n$$

$$= \left(a_1\left[\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' + \alpha_{13} x_3'\right] + a_2\left[\alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \alpha_{23} x_3'\right] + a_3\left[\alpha_{31} x_1' + \alpha_{32} x_2' + \alpha_{33} x_3'\right]\right)^n$$

$$= \left(a_1' x_1' + a_2' x_2' + a_3' x_3'\right)^n = a_{x'}'^n$$

transponirte Substitution!

$$\begin{aligned} a_1' &= \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \alpha_{31} a_3 \\ a_2' &= \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \alpha_{32} a_3 \\ a_3' &= \alpha_{13} a_1 + \alpha_{23} a_2 + \alpha_{33} a_3 \end{aligned}$$

Von unserem gegenwärtigen invariantentheoret.

schen Standpunkte aus betrachten wir alle diese Formen mit der ursprünglichen äquivalent ~~sind~~ oder vielmehr unterscheiden, die Eigenschaften und Gebilde, welche durch lineare Transformation nicht geändert oder ~~zer~~ zerstört werden. Doch können wir nicht mehr so vielfach wie früher verfahren, sondern wollen die Definitionsgleichung der Inv. und Covarianten

$$\mathfrak{J}(a) = \Delta^p \mathfrak{J}(a')$$
$$\mathfrak{C}(a, x) = \frac{1}{\Delta^p}\, \mathfrak{C}(a', x')$$

dadurch zu befriedigen suchen, dass wir uns zunächst Invariante Symbole construiren:

1.) $a_x \quad : \quad a'_{x'}$

2.) $(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad : \quad \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Bei Anwendung der obigen homogenen Symbolik muss nothwendig jedes Symbol im Ganzen von n^ten Grade vorkommen. Verstehen (oder von selbst) wir ferner unter p das Gewicht, so gelten offenbar die Sätze:

Jeder symbolische Ausdruck $\sum z\,(abc)^{\sigma}(abd)^{\tau}(bcd)^{\mu}\ldots$
ist eine Invariante vom Gewichte $p = \sigma + \tau + \mu + \ldots$ $(ng - 3p = 0)$

Jeder symbolische Ausdruck $\sum z\,(abc)^{\sigma}(abd)^{\tau}(bcd)^{\mu}\ldots$
$a_x^{\xi} b_x^{\eta} c_x^{\zeta} \ldots$ ist eine Covariante vom Gewichte $p = \sigma + \tau + \mu + \ldots$
$m = ng - 3p$

Grad und Ordnung.

Soweit genaue Uebereinstimmung mit den binären Formen, wo das Symbol (ab) dem jetzigen (abc) entspricht. Den höheren Formen allein charakteristisch sind die weiteren invarianten Symbole: (abu) führt die neue Variablenreihe u ein, welche mit den a aequivalent sind.

$$\begin{aligned} \delta a_1 &= A_{11} a_1' + A_{12} a_2' + A_{13} a_3' \\ \delta a_2 &= A_{21} a_1' + A_{22} a_2' + A_{23} a_3' \\ \delta a_3 &= A_{31} a_1' + A_{32} a_2' + A_{33} a_3' \end{aligned}$$

3.) $(abu) : (a'b'u') = \delta(abu)$

Daher ist natürlich auch

$$u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

invariant, wie man auch direkt sieht:

denn $u_x = u'_{x'}$ d.h. die identische Covariante.

Jeder symbolische Ausdruck $\sum \lambda (ab\,c)^{\varepsilon} (abd)^{\tau}$
$(abu)^{\varkappa} (acu)^{\iota} \ldots$ ist eine Contravariante vom Gerichte

$p = 6 + \tau + \mu + \ldots + \varkappa + \iota \ldots$ $\quad k = 3p - ng$

Jeder symbolische Ausdruck $\sum \lambda (ab\,c)^{\varepsilon} (abd)^{\tau} \ldots$
$a_x^{\xi} b_x^{\eta} \ldots (ab\,u)^{\varkappa} (ac\,u)^{\iota} \ldots$ ist eine Zwischenform
von dem Gerichte $p = 6 + \tau + \varkappa + \ldots + \varkappa + \iota + \ldots$

Grad, Ordnung und Klasse. $\quad m - k = ng - 3p$

Damit sind dann alle einfachen invarianten Gebilde für das ternäre Gebiet erschöpft, wenn wir von mehr als n Variabelnreihen $x, y, \ldots u, v \ldots$ absehen.

Noch ehe wir zu einfachen Beispielen übergehen drängt sich nun hier ganz von selbst die geometrische Deutung unserer invarianten Gebilde auf. Die Variable x als Punktcoordinate eines Coordinatendreieckes. Form a_x^n = Curve $n$ter Ordnung. Invariante gleich Null gesetzt sagt aus, dass die Curve eine Eigenschaft besitzt, welche linearen

Transformationen gegenüber invariant bleibt. z. B. die Eigenschaft einen Doppelpunkt zu besitzen. Man sieht in der Geometrie, dass dieser Bedingung dann gleichzeitig erfüllt sein der Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \,, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \,, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \,.$$

Da man sich nun leicht überzeugen kann, dass die Doppelpunkteigenschaft bei linearer Transformation erhalten bleibt, so folgt dass der Eliminationsresultant gegen 3 Gleichung d. h. die Diskriminante der kanonischen Form eine Invariante ist. Aber davon kann man sich auch direkt mittelst unserer symbolischen Darstellung überzeugen:

$$a_{x'}^{n-1} a_1 = 0 \qquad a_{x'}^{n-1} a_2 = 0 \qquad a_{x'}^{n-1} a_3 = 0$$

dann ist

$$\sigma a_{x'}^{(n-1)} (A_{11} a_1' + A_{12} a_2' + A_{13} a_3') = 0 \,, \quad \text{—} \,, \quad \text{—} \,,$$

d. h.

$$a_{x'}^{m-1} a_1' = 0,\ a_{x'}^{n-1} a_2' = 0,\ a_{x'}^{h-1} a_3' = 0$$

q. e. d.

Als Beispiel diene die quadratische Form:

$$f(x_1 x_2 x_3) = a_{00} x_1^2 + 2 a_{10} x_1 x_2 + 2 a_{01} x_1 x_3 + a_{20} x_2^2 + 2 a_{11} x_2 x_3 + a_{02} x_3^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{00} x_1 + a_{10} x_2 + a_{01} x_3$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{10} x_1 + a_{20} x_2 + a_{11} x_3$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} = a_{01} x_1 + a_{11} x_2 + a_{02} x_3$$

$$\text{Discr.} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{01} \\ a_{10} & a_{20} & a_{11} \\ a_{01} & a_{11} & a_{02} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ b_1 b_2 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (abc)^2$$ ist eine Invariante zweiten Grades.

Als Beispiel für die Covariante diene vorläufig die Grundform selbst. Als geometrisches Bild der Covariante erscheint

eine zweite Linie, deren Verhältniss zu ersten ein invarianter ist.

Wir können nun nur geometrischen den Sinn der Variablen u. Die lineare Form

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

stellt eine Grade vor. Die Coefficienten der Gleichung einer Graden heissen die Linienkoordinaten und das sind die u_1 die in obiger Weise transformirt werden.

Eine Gleichung zwischen den u stellt eine Reihenfolge von Graden vor, die eine Klassencurve bilden. Die Contravariante ist eine Klassencurve

Beispiel die Contravariante

$(abu)^2$ d. Gleichung der Kegelschnitte in Linienkoordinaten, was wir auch später allgemeiner beweisen werden. Als Beispiel einer zweifachen Form diene $(abu)^2 a_x . b_x$. Zu jeden Punkte gehört ein Kegelschnitt in Linienkoordinaten zu jeder Grade eine Kegelschnitt in Punktkoordinaten. Doch

ist das einfachste Beispiel einer Zwischenform u_x, wo zu jedem Punkte x_i eine durch ihn gehende Gerade und zugehörig gehört.

§ 27 Simultanbildungen im binären Gebiete.

Die Covarianten kann man auffassen als Simultan-Invarianten von

$f = a_{00} x_1^n + \dots + a_{0n} x_2^n$ und der Linearform $\varphi = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$

Die Contravariante:

$f = a_{00} x_1^n + \dots + a_{0n} x_2^n$ und der Linearform $l = l_1 x_1 + l_2 x_2$

$l_1 : u_1, \quad l_2 : u_2$

Die Zwischenform erfordert die Adjunktion beider Linearformen. Um diese simultane Bildungen zu verallgemeinern, fügen wir allgemein hinzu

$f = a_x^n$ $\quad \varphi = \alpha_x^r$, $\quad \psi = u_\beta^\mu$

Doch darzustellen nicht nötig, vielmehr wird Form von der Art:

$F = \dots a_x^\nu \dots \alpha_x^\mu$

Solche Formen haben $\varphi(N)\,\varphi(N')$ Constante.

$\varphi(N) = \frac{(N+1)(N+2)}{1 \cdot 2}$

Um nun allgemeine invariante Bildungen symbolisch herzustellen, sehen wir zu in welcher Weise die Symbole linear transformirt werden. Es findet sich:

Die Symbole a, A wie die x

" " α, A wie die x

d. h. Die Invarianten dürfen enthalten die Symbole:

1.) a_x, b_x, A_x, $\alpha_x \beta_x$ A_x

2.) $(abc)(abA)$, $(AB\alpha)$ $(\alpha\beta A)(\alpha\beta A)$...

3.) $(\alpha\beta A)(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta AB)$

4.) a_α, a_A, A_α, A_A,

Es sind diese Ueberlegungen vielleicht ihrer Allgemeinheit und Abstraktheit halber schwerverständlich ausgefallen. Da sie aber [illegible] von Grund

mentaler Bedeutung sind, so möchte sich sie an einer Reihe von Beispielen erläutern.

$$f = a_x^n = b_x^n = \dots$$

$J = (abc)^n$ für ungerades n (Früheres Beispiel $n=2$)

$$F = A_x^n \qquad J = (abA)^n \text{ ungerades } n$$

$$F = C_x^n \qquad J = (aAC)^n \text{ für alle } n.$$

Diese Invarianten sind vom 3ten Grade, unserem Uebereinkommen entsprechen die folgenden:

$$\varphi = u_\alpha^n \qquad J = A_\alpha^n$$

$$\varphi = u_x^n \qquad C = a_\alpha^i a_x^{n-i} u_\alpha^{r-i}$$

Endlich

$$F = A_x^N u_\alpha^N \qquad J = A_\alpha^N \quad \text{z. B. } n=1$$

$$F = A_x u_\alpha \qquad J = A_\alpha$$

$$F = A_x^N u_\alpha^n \quad \begin{cases} N > N & C = A_\alpha^N A_x^{N-N} \\ N < N & C = A_\alpha^N u_\alpha^{N-N} \end{cases}$$

Geometrische Deutung: 2 Ordnungscurven.
Invariante = Null bedeutet eine bei linearen
Transformation sich nicht ändernde Eigenschaft
z. B. die Faktinvariante. Denn 2 unendlich nahe Schnittpunkte
bleiben auch nach der Transformation unendlich
nahe.

$f = a_x^2 \qquad F = A_x^2$

$x_3 = -\frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_3}$

$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \frac{a_3}{A_3}\left(A_1 x_1 + A_2 x_2\right)^2 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - \frac{a_3}{\lambda_3}\left(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2\right)$

$= A_3 \lambda_3 \left\{ \left(A_3 a_1 - a_3 A_1\right) x_1^2 + \left(a_2 A_3 - a_3 A_2\right) x_2^2 \right\} \left(A_3 a_1 - a_3 A_1\right) x_1 + \left(a_2 A_3 - a_3 A_2\right) x_2$

$f = \ldots + A_x B_x + \lambda a_x^2 = \ldots A_x^2$

$(h h_1 h_2)^2 = 0$

$(ab\,u)^2 = 0$ ist die Gl. der Tangentenpaare in
Linienkoordinaten, folglich $(ab\,A)(ab\,B)$ die Faktinvariante.

Eine Ordnungscurve und eine Klassencurve 2. G.

$f = a_x^n$ $\quad$ $\varphi = u_\alpha$

$T = a_\alpha^n = 0$ bedeutet, dass jene Punkte y auf auf der Ordnungscurve liegt. u. s. w.

Endlich können wir noch Grundformen und Covarianten, Contravarianten, Zwischenformen mit mehr Variabelenreihen betrachten. Die betreffenden Bildungen sind symbolisch leicht anzugeben. Wir beschränken uns auf die Polarbildung.

$$f(x_1 x_2 x_3) \quad : \quad f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3) = a_x^n$$

$$= f + \binom{n}{1} \lambda P_y f + \binom{n}{2} \lambda^2 P_y^2 f + \binom{n}{3} \lambda^3 P_y^3 f + \cdots$$

$$P_y = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = a_x^{n-1} a_y$$

$$P_y^2 = P_y P_z$$

...

Ebenso für v: $\varphi = \alpha_u^r$ $\quad$ $P_v = \alpha_u^{r-1} \alpha_u v$

$$P_v^2 = \alpha_u^{r-2} \alpha_v^2$$

§ 28. Die Form zweiter Ordnung.

Wir lernen jetzt einige Beispiele kennen, die zeigen, wie fruchtbar und bedeutungsvoll die Ideen der Invariantentheorie auch hier bei der Discussion der ternären Gebiete eingreifen und gewissermassen das analytische Wiederspiel fundamentaler geometrischer Untersuchungen bilden.

Gerade die Dürftigkeit der Beispiele lässt ahnen, dass hier noch interessante und allgemeine und fruchtbare Arbeiten zu machen sind. Ich werde mich Andeutungen erlauben, persönlicher Auskunft gerne bereit. Bitte um [illegible].

Wir werden uns einerseits möglichst kurz fassen müssen, um später noch für das interessanteste Beispiel dieser Art, Kurve 3ter Ordnung ~~[illegible]~~ Zeit zu behalten, andererseits aber die Gedanken so anordnen, dass sie eine unmittelbare Uebertragung auf höhere quadratische Formen gestatten.

Wir schreiben die quadratische Form bequemer:

$$f = a_x^2 = \sum a_{ik} x_i x_k = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$
$$+ 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3$$

Geometrisches Bild ist der Regelschnitt.
Für diesen Doppelpunkt d.h. das Zerfallen dieses
Regelschnittes hatten wir oben schon die Bedg.

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(abc)^2 = 0$$

Um die Gl. der Regelschnitte in Linienkoordinaten zu finden, setze wir

$$x_1' \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2' \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3' \frac{\partial f}{\partial x_3} = u_1 x_1' + u_2 x_2' + u_3 x_3'$$

$$a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' = 0$$

$$U = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Drei sind die einzig Form., f, d, U, u_x.

Elegante Anwendung auf das folgende
Problem: Gegeben sind 2 quadratische Formen $f = a_{ik} x_i x_k$
und $F = A_{ik} x_i x_k$. Es soll eine lineare Transformation
so gefunden werden, dass:

$$\varphi = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$$

$$f = a_{x_1} x_1^2 + a_2 x_2'^2 + a_3 x_3'^2$$

Zweite Auffassung als Potenzdarstellg = Kaskade als Ueberführung in eine spezielle Gestalt mit Gliedern verschwindenden Coefficienten. Wir erledigen unser Problem durch blosse Anwendg der Definitionsgl. unserer Invariante und Contravariante. Nun muss ich an ein Prinzip erinnern, welches wir bei den binäre Formen kennen gelernt haben und unmittelbar hierüber übertragen können:

$$C(\lambda a + A, x'_2) = \lambda^r C(a, x_2) + \lambda^{r-1} \Omega C(a, A; x_2) + \ldots$$

Man kann so immer aus einer gewöhnlichen Invariante simultane für 2 Formen derselben Ordng bilden. Wir bilden nun aus a eine solche Simultan. bildg.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + A_{11}, & \lambda a_{12} + A_{12}, & \lambda a_{13} + A_{13} \\ \end{vmatrix} = \mathfrak{J}_1 \lambda^2 + \mathfrak{J}_2 \lambda + \mathfrak{J}_3$$

$$= \frac{1}{\delta^2} \begin{vmatrix} \lambda-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta^2}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

Also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ergeben sich als die Wurzeln der Gleichung:

$$\mathfrak{I}_1 \lambda^3 + \mathfrak{I}_2 \lambda^2 + \mathfrak{I}_3 \lambda + \mathfrak{I}_4 = 0$$

wo $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3, \mathfrak{I}_4$ bekannte Simultan-invarianten der beiden vorgelegten Grundformen sind.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind also irrationale Simultan-invarianten.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} - \alpha_{11} & \cdots & u_1 \\ & & \\ u_1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta^2} \begin{vmatrix} \lambda-\lambda_1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & \lambda-\lambda_2 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda_3 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & \end{vmatrix}$$

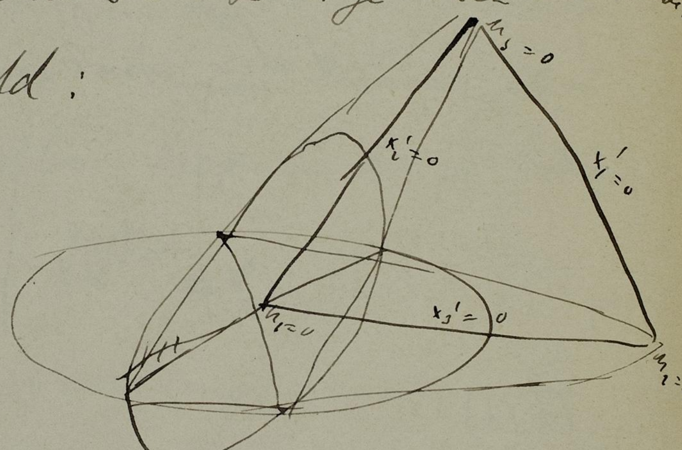
$$= U(\lambda)$$

$$U(\lambda_1) = (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)\, u_1^2$$

$$U(\lambda_2) = (\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)\, u_2^2$$

$$U(\lambda_3) = (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\, u_3^2$$

Nehmen wir nun die Bedeutung von U zu Hülfe, so ist jetzt $U(\lambda)=0$ die Gleichung des zerfallenden Kegelschnittes $(\lambda_1-\lambda_2)x_2'^2+(\lambda_1-\lambda_3)x_3'^2$ in Liniencoordinaten oder $u_1=0$ die Gleichung der Punkte $x_2'=0$, $x_3'=0$ in Liniencoordinaten. Oder die Coefficienten der Linearform u_1 sind die gesuchten Coordinaten der Punkte $x_2'=0$, $x_3'=0$. Die Geraden $x_1'=0$, $x_2'=0$ $x_3'=0$ erhalte ich also, wenn ich jene 3 Punkte zu je zweien verbinde. Das geometrische Bild:



Gleichzeitig auf das gemeinsame Polardreieck transformirt und, wenn wir zu metrischen Verhältnissen zurückgehen, so ist hiemit das Hauptaxenproblem erledigt. Wie schon mehrfach angedeutet ist

Studium der Ausartungen.

das analoge Problem für das quaternäre, quinäre
-- Gebiet ebenso zu erledigen. Also die Transformation
2er Flächen weiter Ordnung auf das geometrisch-optische Polar
Netzwerk im Raume von 3 Dimensionen etc.

Bevor ich nun zur invariantentheoretischen Diskussion
der binären cubischen Form übergehe möchte ich hier
einige allgemeinere Bemerkungen einfügen, welche
sich auf den Wert und die Bedeutung der Resultate der
Invariantentheorie beziehen. Grundformen.
Invariante Gebilde. Geometrische Deutung. Beziehg.
zur Algebra. Die Invariantentheorie ist allgemeiner.
Die gegenwärtige Litteratur §§ können nicht mehr ausführen.
wohl aber zur Ausführung anregen und vor allem
an den invariantentheoretischen Standpunkt gewöhnen.
Das wird die allgemeine Auffassung der Probleme erleichtern
und andererseits an die Stelle von Kunstgriffen. Metho-
den setzen.

§ 29 Die cubische ternäre Form.

Vorher möchte ich noch eine kurze Bemerkung über die sogenannte bilineare ternäre Form einschalten. Wir können wie erwähnt auch die Formen vom Typus der binären Form als Grundform betrachten:

$$f = A_{x^N}^{N} u_A^{\alpha N}$$

Der einfachste Fall $N=1$, $\nu=1$.

$$f = A_x u_A = A_{11} x_1 u_1 + A_{12} x_1 u_2 + \cdots + A_{33} x_3 u_3$$

Dieser Fall ist in der bisherige Litteratur sehr vielfach behandelt und zwar im Sinne der Invariantentheorie aber doch nicht eigentlich bewusst mit ihren Mitteln. Das Hauptresultat:

$$f = A_1 x_1' u_1' + A_2 x_2' u_2' + A_3 x_3' u_3'$$

auf eine Weise mit Hilfe einer kubischen Gleichung. Durch $x_1'=0\ x_2'=0\ x_3'=0$, $u_1'=0\ u_2'=0\ u_3'=0$ sind 3 Gerade ausgezeichnet, die sich in jenen 9 Punkten $x_1'=0 x_2'=0$, $x_3'=0$ schneiden d. h. jener Linear

Form entspricht ein Dreieck. Umgekehrt entspricht jedem Dreieck eine bilineare Form. Man zu diesen Dreieck auch noch auf eine andere Weise gelangen. Man kann nämlich aus den 9 Koeffizienten der linearen Form eine lineare Substitution zusammensetzen und umgekehrt. Mittelst dieser entspricht jeden Punkte der Ebene ein anderer und man kann nach den Punkte fragen, welche sich selbst entsprechte d.h.

$$\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 = \lambda x_1'$$

— — — —

— — — —

man findet ein cubische Gleichung für λ, nach deren Lösung nur noch lineare Gleichungen vorliege. d.h. Es giebt drei Punkte. Ebenso bleibe die durch diese gehe Gerade d.h. ein Dreieck ungeändert. Diesen Dreieck entspricht dem obigen. Anordnungen, Uebertragung auf höhere Dimensionen.

Es giebt zwei Wege, welche in die Theorie der reinen Formen einführen und dieselbe zu befriedigenden und sehr eleganten Abschlüssen bringen.

1.) $f(x) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3 = a_x^3 = a_{00} x_1^3 + 3 a_{00} x_1^2 x_2 + \ldots$

$$a_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = a_i \cdot a_k \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \qquad i + k = 3$$

$$\varphi = A_x^4 \qquad A_i \cdot A_k = A_{ik}$$

$$(a A_u)^3 A_x^3 = \Delta A_x^3 u^3$$

Gleichung zwischen den 9 Unbekannten A und Δ.

$$\begin{vmatrix} a_1 A_1 u_1 \\ a_2 A_2 u_2 \\ a_3 A_3 u_3 \end{vmatrix} (a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)$$

$$= \Delta (A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3)(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3)$$

$$(a_2 A_3 - A_2 a_3)(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3) a_1 = \Delta A_1 A_1$$

$$- a_{01} A_{21} - a_{11} A_{22} - a_{02} A_{23} + a_{10} A_{31} + a_{20} A_{32} + a_{11} A_{33} - \Delta A_{11} = 0$$

Ab. H. Ich wollte noch in kurzen Zügen auf die invariantentheoretische Behandlung der cubischen Formen f von eingehen.

$$f = a_x^3 = a_{00} x_1^3 + 3 a_{10} x_1^2 x_2 + \dots + a_{03} x_2^3$$

$$\varphi = A_x \cdot u_A \qquad A_i A_{ik} = \alpha_{ik}$$

Ich gelange am raschesten zu den entscheidenden Formeln der Theorie, wenn ich frage mit φ so dann:

$$(a A u)\, a_A\, a_x = 1\, A_x\, u_A$$

d.h.

$$= 1 \sum \alpha_{ik} x_i u_k$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & A_1 & u_1 \\ a_2 & A_2 & u_2 \\ a_3 & A_3 & u_3 \end{vmatrix} \{ a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \} \{ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \} =$$

9 Gleichungen zwischen 9 Unbekannten α_{ik}

Die erste Gleichung lautet beispielsweise:

$$-a_{01}\alpha_{21} - a_{11}\alpha_{22} - a_{02}\alpha_{23} + a_{10}\alpha_{31} + a_{20}\alpha_{32} + a_{11}\alpha_{33} - 1\alpha_{11} = 0$$

Durch Elimination der α gelange wir zu der determinierenden Gleichung in 1 in der Determinanten Gestalt:

$$
\begin{vmatrix}
-\lambda & -a_{01} & a_{10} & 0 & -a_{11} & a_{20} & 0 & -a_{02} & a_{11} \\
a_{01} & 0 & -a_{00} & a_{11}-\lambda & 0 & -a_{10} & a_{02} & 0 & -a_{01} \\
-a_{10} & a_{00} & 0 & -a_{20} & a_{10} & 0 & -a_{11}-\lambda & a_{01} & 0 \\
0 & -a_{11}-\lambda & a_{20} & 0 & -a_{21} & a_{30} & 0 & -a_{12} & a_{21} \\
a_{11} & 0 & -a_{10} & a_{21} & -\lambda & -a_{20} & a_{12} & 0 & -a_{11} \\
-a_{20} & a_{10} & 0 & -a_{30} & a_{20} & 0 & -a_{21} & a_{11}-\lambda & 0 \\
0 & -a_{02} & a_{11}-\lambda & 0 & -a_{12} & a_{21} & 0 & -a_{03} & a_{12} \\
a_{02} & 0 & -a_{01} & a_{12} & 0 & a_{11}-\lambda & a_{03} & 0 & -a_{02} \\
-a_{11} & a_{01} & 0 & -a_{21} & a_{11} & 0 & -a_{12} & a_{02} & -\lambda
\end{vmatrix}
$$

$$
= \lambda \left\{ \lambda^8 - 6 S \lambda^4 + T \lambda^2 - 3 S^2 \right\}
$$

Dieser $\lambda = 0$ verschwindet jene Determinante. S ist eine A Invariante vom Grade 4 teilbar dem Gewichte 4. T vom Grade und Gewichte 6. Es muss eine bilineare Form φ existieren, dass

$$(a A a) a_A a_x = 0$$

ist und in der That ist diese φ die identische

$$\varphi = a_{x}.$$

wie man sogleich erkannte. Das Uebrige

$$\begin{array}{cccc} \pm\lambda_1 & \pm\lambda_2 & \pm\lambda_3 & \pm\lambda_4 \\ \varphi_1^{(+)} & \varphi_2^{(+)} & \varphi_3^{(+)} & \varphi_4^{(+)} \\ \varphi_1^{(-)} & \varphi_2^{(-)} & \varphi_3^{(-)} & \varphi_4^{(-)} \end{array}$$

Aus lassen sich zwischen diesen Formen φ ganz einfache Invariante Bedingungen ableiten, welche den Bereich der 3 quadratische Form φ bei der Diskussion der Signaturquadratische Form entsprechen. Die Aufgabe der φ und die Diskussion will ich jedoch nicht hier sondern nur eine Folgerung ziehen bezüglich der Darstellg. der Grundform f:

$$f = \alpha_{11} x_1' u_1 + \alpha_{12} x_1' u_2 + \alpha_{13} x_1' u_3 \quad (x_1' x_1 = 0)$$

Vergleichen wir dann z. B. den Coefficienten von $x_1' u_2$:

$$a(a_1 A_3 - a_3 \alpha_{13}) a_1 A = 0$$

$$a_1^2 a_3 \alpha_{33} - a_1^2 a_3 \alpha_{11} = 0 \quad \text{d. h.} \quad a_{01} = 0$$

Durch Vergleichung der übrigen Coefficienten ergibt sich, dass alle a ausser:

a_{00}, a_{03}, a_{30}, a_{11}

Wir setzen diese:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}(\alpha_{22}-\alpha_{33}) + \lambda\alpha_{11} = 0 \\ a_{11}(\alpha_{33}-\alpha_{11}) + \lambda\alpha_{22} = 0 \\ a_{11}(\alpha_{11}-\alpha_{22}) + \lambda\alpha_{33} = 0 \end{array}\right.$$

$$A = 0 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$$

1, 1, 1, dann wird a_{11} verwandelt $= \lambda$ und f:

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda x_1 x_2 x_3$$

also diese Transformation ist immer möglich und zwar auf 8 oder viel- auf 4 Weisen.

Wir bilden nun eine Covariante, welche wir die Hessesche nennen, weil sie eben analog der Hesseschen im binären Gebiet ist.

$$H = (abc)^2 a_x b_x c_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x_1 & \lambda x_3 & \lambda x_2 \\ \lambda x_3 & 6x_2 & \lambda x_1 \\ \lambda x_2 & \lambda x_1 & 6x_3 \end{vmatrix}$$

$$= 6^3 x_1 x_2 x_3 - 6\lambda^2 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 2\lambda^3 x_1 x_2 x_3$$

$$= -6\lambda^2 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (2\lambda^3 + 6^3)\, x_1 x_2 x_3$$

$$6\lambda^2 f + H = (8\lambda^3 + 6^3)\, x_1 x_2 x_3$$

d. h. Als Hauptresultat unserer geistigen Entwicklung sehen wir die folgende Thatsachen an f, H : $6\mu f + H$: $\mu^4 - 6S\mu^2 + T\mu - 3S^2 = 0$

Jedes solche System von 3 Geraden schneidet die 9 Wendep. aus. die Form nimmt auf ein Wendepunktsdreieck bezogen eine einfache Gestalt an. War die Ausart. so setzen wir Doppelp. voraus. also 6 Wendepunkte fallen hinein. Nur ein System von 3 Geraden kann existiren $i = 0$, $j = 0$

Setzen wir noch $\lambda^2 = \mu$, so ~~...~~ haben wir das überraschende und wichtige Deutungsfähige Resultat.

$$6\mu f + H = \text{const. } l_1 l_2 l_3$$

$$\mu^4 - 6S\mu^2 + T\mu - 3S^2 = 0$$

Die Geometrie lehrt dass $H = 0$ $f = 0$ in den 9 Wendepunkten schneidet. Diese werden also hier mit gefunden und liegen zu je drei auf 3 Geraden. Und zwar ist diese Anordnung möglich. ~~...~~ Unsere Gleichung spezielle Form ist eine auf ein Wendepunktsdreieck bezogene. Auf die gegenseitige Beziehungen gehen wir nicht ein. Aber was tritt ein ~~...~~ beim Doppelpunkt. Die Geometrie lehrt, dass dann die Hessische die Grund~~...~~kurve berührt d. h. 2 Wurzeln ~~...~~ jener Gleichung 4ten Grades müssen zusammenfallen

$i = 0$ ($D = 27j^2 - i^3$ für biquadratische binäre Form)

$j = T^2 - 64S^3$ = Diskriminante

$$\left\{ a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = -S \quad a_3 = \frac{1}{4}T \quad a_4 = -3S^2 \right\}$$

Zur Aufstellung der Kurvengleichung in Linien-
coordinaten dient das Clebsch'sche Uebertragungs-
prinzip, welches sich hier nur anders-
artig gestaltet.

Soll eine Gerade, eine Kurve n der Ordnung in einer Punktgruppe von der speziellen binären invarianten Eigenschaft

$$\sum (ab)^6 (ac)^{\bar{1}} (bc)^6 \ldots = 0$$

schneiden, so muß die Gesamtheit dieser Gerade die Klasse n:

$$\sum (abu)^6 (acu)^{\bar{1}} (bcu)^6 \ldots = 0$$

So ist also wegen

$$d = (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd)$$

$$U = (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu) = 0$$

die Gleichung der Kurve 3ter Ordnung in Linienkoordinaten.
U ist Contravariante von der Klasse 6.

Zum Schluss möchte ich noch einige allgemeine Bemerkungen über höhere Dimensionen hinzufügen:

§ 30 Allgemeinere Bemerkungen und Gesichtspunkte

Ueberlegen wir zunächst den Invariantenbegriff im quaternären Gebiete:

$$f = \mathfrak{S}\, k\, H(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum \binom{n}{i\,k\,l} a_{i\,k\,l}\, x_1^{n-i-k-l}\, x_2^{i}\, x_3^{k}\, x_4^{l}$$

$$= (a_x x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 + a_3 x_4)^n = a_x^n = b_x^n = \dots$$

$$x_1 = \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' + \dots \alpha_{14} x_4'$$

$$\dots \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$f' = \sum \binom{n}{i\,k\,l} a'_{i\,k\,l}\, x_1'^{n-i-k-l}\, x_2'^{i}\, x_3'^{k}\, x_4'^{l} = a'^{n}_{x'} = b'^{n}_{x'} = \dots$$

$$\mathfrak{I}(a) = \frac{1}{\delta p}\, \mathfrak{I}(a')$$

$$i(a, x) = \frac{1}{\delta p}\, i(a' x')$$

Es fragt sich nun, welche neue Variable wir den u der dreizeilige Determinanten wir hinzufügen müssen. Zu den Zweierbilden wir das dreizeilige Schema:

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \end{matrix}$$

Wir können hieraus 4 dreizeilige Determinanten bilden

$$u_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad u_2 = \begin{vmatrix} x_1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad u_3 = \quad \begin{vmatrix} u_4 = \end{vmatrix},$$

Transformieren wir nun die x, y, z gleichzeitig mit derselben obigen Transformation, so transformieren sich auch die u linear und zwar

$$u_1' = A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3 + A_{14} u_4$$

Anderer können wir aber auch 6 zweizeilige D[eterminanten]

$p_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad p_{13} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix}$

bilden. Transformieren sich die x, y, z. durch dieselbe α linear, so auch die p. linear durch gewisse andere lineare Transfor.

$$p'_{ik} = \alpha L(p_{ik})$$

~~Die quaternäre Grundform~~ Ab. H. Quaternäre Grundform allgemeinste Invariantenbildung

$$C(a, x; u, p) = \frac{1}{\delta} C(a', x', u', p')$$

Das geometrische Bild ist eine Fläche, Punkt, Ebene, Linien-coordinaten. Zwischen letzteren eine quadratische Relation

$$P = p_{12} p_{34} + p_{23} p_{14} + p_{31} p_{24} = 0$$

P ist ein ~~quadratische~~ identische Covariante vom 2ten Grade in den p.
! Vgl. unten

Um zu verallgemeinern können natürlich mehr Variabeln, solche $x, y.$ $u, v, w.$ $, p, q,$ und simultane Grundformen mit diesen Variabeln zu Grunde gelegt werden.

Endlich noch zu wesentlich verschiedenen Verallgemeinerungen nämlich:

1.) Ebenere Variablenreihen, welche ganz verschieden transformirt werden.

$$f(x, y) \quad , \quad f'(x', y' \alpha, \beta)$$

$$J(a) = \sum_{\varepsilon} \varepsilon \Pi g \, J(a')$$

Beispiel bieten die Combinanten:

$$f + \mu g : \quad y_1 f_x + y_2 g_y$$

2.) Verschiedenerlei Arten von Variablenreihen binär = ternäre Formen etc.

Beispiel Combinante dreier Kegelschnitte.

Natürlich sind diese Probleme so allgemein, dass sie so nicht direkt zu behandeln sind. Es

ist aber gut sich diese allgemeinen Gesichtspunkte
zu vergegenwärtigen. Die ganze Mathematik ist
ja gewissermassen ein grosser Commentar eines Problems und
das Problem der allgemeinste möglich Grenzbedingungen.
Auch diesem kann nur nahe gekommen werden
durch geschickte Specialisirung. Auf diese
wird auch hier allenthalben ankommen. Vorgezeigt
ist der Weg durch das Princip der
binären Formen theorie.

Mit diesen allgemeinen Hinweisen schliesse
ich denn meine diesjährige Vorlesung. Falls
es sich später trifft, dass hier oder da andere
der Herrn sich finden, so ist es
selbstverständlich, dass ich an Besprechungen
und Litteraturnachweisen gern bereit bin, auch
wenn der Gegenstand nur Bezüge hat.
Endlich spreche ich mein Dank aus für ihre
rege Theilnahme an meinen Vorträgen,

durch welche mir der erste Eintritt in die akademische Lehrthätigkeit angenehm und erfolgreich wurde.

Um aber noch kurz auf greifbare Beispiele zu kommen, so weise ich erstens auf den Fall zweier Grundformen 2ter Ordnung hin

$$f = a_{000}x_1^2 + \cdots + a_{002}x_4^2 \qquad f' = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$
$$F = A_{000}x_1^2 + \cdots + A_{002}x_4^2 \qquad F' = A_1'x_1'^2 + A_2'x_2'^2 + \cdots + A_4'x_4'^2$$

Geometrisch gesprochen die beiden Flächen werden auf ihre gemeinsamen Polartetraeder bezogen. Studium der Ausartungen d. h. der Übergangsfälle, insofern interessant, wo jene beiden Flächen eine spezielle invariante Lage zu einander besitzen.

Auf ein weiter Beispiel möchte ich etwas näher eingehen, weil dasselbe merkwürdige Flächen in die bisherige Form theorie zerstreut.

$$f = a_{000}x_1^3 + \cdots + a_{003}x_4^3 \qquad \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 20 \text{ Constante.}$$
$$= f_1^3 + f_2^3 + f_3^3 + f_4^3 + f_5^3$$

Eine dichte Auffassung der Problems wird auf neue Wichtige Eliminationsschwierigkeiten stossen.

Die Darstellung ist eine eindeutige. Der Satz ist sehr merkwürdig. Aus jener umständlichen Elimination muss mit bestimmter Aussicht ein einziges Lösungssystem herauskristallisieren.

Beweis:

$$f = u_1^3 + u_2^3$$

$$l_1^3 + l_2^3 \cdots l_5^3 = u_1^5 + u_2^3 \cdots + u_3^5 - \text{Also}$$

Wir polarisiren diese Gleichung d. h. wir wenden das Differentiationssymbol

$$D_y = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots y_4 \frac{\partial}{\partial \cdots}$$

$$D_{xz} = z_1 \frac{\partial x_1''}{\partial \cdots}$$

$$l_1(x)\, l_1(y)\, l_1(z) + l_2(x)\, l_2(y)\, l_2(z) + \cdots = u_1(x) \cdots$$

Nun bestimmen wir:

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ so dass $l_2(x) = 0,\ l_3(x) = 0\ l_4(x) = 0$

$y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ — dass $l_5(y) = 0\ m_1(y) = 0\ m_2(y) = 0$

$z_1\ z_2\ z_3\ z_4$ — $n_3 = 0\ n_4 = 0\ n_5(z) = 0$

$l_1(x)\ l_2(y)\ l_1(z) = 0$ d.h. $l_1(x) = 0\ l_2(y) = 0\ l_4(z) = 0$

aber wir können auch dass etwa der erste Faktor verschwindet

d.h. $l_1(x) = 0$

$l_2(x) = 0$

$l_3(x) = 0$

$l_4(x) = 0$

d.h. $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ sind nicht allgemein. Also nehmen wir die Formalgorithmen, so ist nun eine Darstellung möglich. Diese Sätze findet sich in den Lehrbüchern in sehr umständlicher und unsystematischer Beweise. Dieser Beweis ist ausserordentlich elegant und einfach und hat den Vorzug der Verallgemeinerungsfähigkeit. Auch

der erwähnte Darstellung stellt wieder
die ganze Theorie der cubischen
Flächen, welche überhaupt ist.
Auch alle Covarianten werden sich in
symmetrischer Weise aus $l_1 \dots l_5$
zusammensetzen und die verschiedenen Formen
und man erhält so elegante Darstellungen.

$$f = l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 + l_4^3 + l_5^3 \qquad d_1 l_1 + d_2 l_2 + d_3 l_3 + d_4 l_4 + d_5 l_5 = 0$$

$$\Delta f = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_2 l_1 & 0 & 0 & \\ -d_1 l_2 & d_3 l_2 & 0 & \\ 0 & -d_2 l_3 & d_4 l_3 & \\ 0 & 0 & -d_3 l_4 & l_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & * & l_5 \frac{d_1^2}{d_5^2} & l_5 \frac{d_1 d_2}{d_5^2} \\ l_5 & & l_1 \frac{d_2}{d_5^2} & \\ l_5 & & l_1 \frac{d_3}{d_5^2} & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_5 \frac{d_1 d_2}{d_5^2} & \\ l_2 + l_5 \frac{d_2^2}{d_5^2} & \\ l_5 \frac{d_2 d_3}{d_5^2} & \end{vmatrix}$$

$d_1 d_2 d_3 \dots d_5$ sind irrationale Fkt.
variable, durch die alle rationale
ausdrückbar sind,

M. H.

In dieser Vorles. möchte ich Ihnen im Zusammenhange diejenigen Sätze aus dem Gebiet der höheren Formentheorie entwickeln, welche sich auf die Endlichkeit gewisser Formen und insbesondere invarianter Bildungen beziehn und welche ich wegen des principiellen Gesichtspunktes so wie wegen der Schwierigkeit, welche ihre Beweise boten für die merkwürdigsten und wichtigsten Theile der Invariantheorie erachte.

Zunächst Beschränkung auf eine einzige binäre Grundform

$$f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n \qquad \begin{cases} x = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta \\ y = \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta \end{cases}$$

Definition der Invariante als ganze rationale Function

$$\mathcal{J}(a') = \Delta^p \mathcal{J}(a) \qquad J = \Sigma C \Pi a_0^{\nu_0} a_1^{\nu_1} \dots a_n^{\nu_n}$$

Die Invariante J ist homogen vom Grade $\varsigma = \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n$ und isobar vom Gewichte $p = \frac{1}{2} n \varsigma$. Man setze $F =$

$$F = (a_1 x + b_1 y)(a_2 x + b_2 y) \dots (a_n x + b_n y)$$

$$(kl) = a_k b_l - a_l b_k$$

Jede Invariante setzt sich additio zusammen aus symmetrischen Gebilden von der Gestalt

$$\mathcal{I} = (1,2)^{e_{12}} (1,3)^{e_{13}} (2,3)^{e_{23}} \dots (n-1,n)^{e_{n-1,n}} + \dots$$

wo man die folgenden Glieder der Summe aus dem hingeschriebenen Anfangsgliede dadurch erhält, dass man die in den Klammern stehenden Zahlen $1, 2, \dots, n$ auf alle möglichen Weisen permutirt. Überdies ist jedoch erforderlich, dass in jenem Anfangsgliede jede der Zahlen $1, 2, \dots, n$ gleich oft (= ϱ mal) vorkommt, d. h. es bestehn für die als Potenzexponenten auftretenden positiven ganzen Zahlen nothwendig die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & e_{12} + e_{13} + \dots + e_{1n} \\ = \; & e_{21} + e_{23} + \dots + e_{2n} \\ & \dots \dots \dots \dots \\ = \; & e_{n1} + e_{n2} + \dots + e_{n,n-1} \end{aligned}$$

wo allgemein e_{kl} und e_{lk} dieselben Zahlen sind.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir

$$a_0 = a_1 a_2 \dots a_n$$
$$\binom{n}{1} a_1 = b_1 a_2 \dots a_n + a_1 b_2 a_3 \dots a_n + \dots$$
$$\binom{n}{2} a_2 = b_1 b_2 a_3 \dots a_n + \dots$$
$$- - - -$$

in die Invariantentheorie; die so entstehende ganze rationale Function F von $a_1, b_1, a_2 \dots$ ist eine Simultaninvariante der linearen Formen

$$a_1 x + b_1 y, \dots \qquad a_n x + b_n y$$

(in $a_1', b_1' \dots a_n', b_n'$)

Denn wenn wir diese transformiren, so transformiren sich die $a_0, a_1 \dots$ in $a_0' a_1' \dots$ und wegen der Invarianteneigenschaft von f ist

$$F' = \delta^p F.$$

Als Simultaninvariante ist F eine ganze rationale Verbindung der (k l). Ausserdem kommt in jedem Gliede von F eine jede Zahl k gleichoft, nämlich δ mal vor d.h. F ist in den Coefficienten einer jeden von den n Linearformen vom Grade δ. Durch Vermutation und Addition kann man leicht die Symmetrie in den n Formen herstellen.

Umgekehrt

Eine jede Funktion F der (k,l) mit den vorhin bezeichneten Eigenschaften ist eine Invariante.

Zum Beweise setze

$a_1 = 1,\ a_2 = 1 \ldots\ a_n = 1$ und dadurch gehe F in (F) über.

$(a_1) = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

$(a_2) = b_1 b_2 + b_1 b_3 + \ldots + b_n b_{n-1}$

$\ldots\ldots$

$(a_n) = b_1 b_2 \ldots b_n$

Dann wird

(F) = Ganz. rat. Funkt. von $(a_1), (a_2) \ldots, (a_n)$ und zwar nicht homogen von g Grade S, wenn S die Zahl bezeichnet, wie oft jede Zahl k in F vorkommt (vgl. die Darstellung symmetrischer Funktionen durch die elementarsymmetrischen Funktionen) Nun setze in (F) wieder für $b_1 : \frac{b_1}{a_1}$ $b_2 : \frac{b_2}{a_2}$ $\ldots$ und multipliziere in der ganz. rat. Funktion für

$(a_1) : \frac{b_1}{a_1} + \ldots = \frac{a_1}{a_0}$

$(a_2) : \frac{a_2}{a_0}$

dann geht (F) in $\frac{F}{(a_1 a_2 \ldots)^S}$ über und

$$\frac{F}{(a_1 a_2 \ldots)^S} = \frac{\text{Ganz. rat. } F(a_0, a_1 \ldots a_n)}{a_0^S}$$

oder

$$F = \text{Ganz rat. } f(a_0, a_1, \ldots a_n) = \mathfrak{J}(a)$$

Endlich ist $\mathfrak{J}$ eine Invariante. Denn $\mathfrak{J}(a')$ mit $= \Delta^r$

$$F(a_1', b_1' \ldots a_n' b_n') = \Delta^r F(a_1, b_1 \ldots) = \Delta^r \mathfrak{J}(a)$$

$$\frac{e^{\frac{2i\pi}{m}\left(\frac{m}{2}+iy\right)^2}}{1 \mp e^{-2\pi y}} + \frac{e^{\frac{2i\pi}{m}\left(\frac{m}{2}-iy\right)^2}}{1 \mp e^{+2\pi y}}$$

$$\frac{1}{e^{2\pi y} \mp 1} + \frac{e^{2\pi y}}{1}$$

Dr. Hilbert. 29

Uebungen über Invariantentheorie

Einstündig Wintersemester

1886/87.

Pherastr. 10.

Ab. H. Die gegenwärtigen Uebungen sollen in erster Linie den Zweck haben, meinem 3 st. Colleg über algebraische Invariantentheorie als Stütze zu dienen. Es ist nämlich eine alte und richtige Erfahrung, dass man für eine math. Disziplin erst dann ein wahrhaftes Interesse und ein vollständiges Verständniss gewinnen kann, wenn man wenigstens vorübergehend sich darin selbstständig gearbeitet hat. Indem meine Uebungsstunde dazu Gelegenheit giebt, möchte ich sie gerne als eine nothwendige Ergänzung des Collegs ansehen. Bei der Leitung derselben würden hauptsächlich folgende Gesichtspunkte maassgebend sein:

1.) Aussprache über diejenigen Punkte aus der Vorlesung, welche noch einer Erläuterung und Vervollständigung bedürfen.

2.) Kenntnisse um die Grundbegriffe der Theo-

minanten Theorie und Differentialrechnung.
2.) Behandlung von Beispielen und Uebungs-
aufgaben, welche die Bedeutung und Verwend-
barkeit der allgemeinen Theorie bestätigen.
Natürlich schon ein Colleg. Aber trotzdem
bleibt dafür ein Colleg nicht immer Zeit übrig
wegen der Fülle des Stoffes. Schriftlich, wie
es üblich ist, aber Kurz, damit keine
überflüssige Arbeit von ihrer Seite vorliegt.
3.) habe ich in Aussicht genommen
die feinere Ausführung der in der Vor-
lesung entwickelten Gedanken, welche
zu selbstständigen Arbeiten anzuregen
geeignet sind.

Welcher von diesen 3 Punkten in den
Vordergrund zu treten hat, wird von den
Wünschen der Herrn abhängen. Uebrigens

möchte ich bitten die Namen mir aufzuschreiben. Die Uebungsstunde wird dann für mich zugleich den Vorteil haben, den Herrn Theilnehmern persönlich näher zu treten, was mir beim Vortragen in einer so abstrakten Wissenschaft, wie Math. sehr angenehm erscheint.

Für heute, wo das Colleg über Invariantentheorie noch garnicht begonnen hat, wünschte ich eine Aufstellung über symmetrische Funktionen machen, welche als Einleitung in die Invariantentheorie dienen kann.

Gleichung n^{ten} Grades:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

$a_0 = 1$, [illegible]

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ seien die n Wurzeln jener Gleichung.

Definition der symmetrischen Funktion der $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$

Symmetrische F. ist eine solche, welche bei jeder Vertauschung ungeändert bleibt. Der einfachste Typus ist

$$\varphi_k = \sum \alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2}\dots\alpha_k^{\mu_k}$$

ist in der That eine symmetrische Funktion. Denn —. Zwei Beispiele:

1.) $\mu_1 = \mu_2 = \dots \mu_k = 1$

$$\sum\alpha_1 = -a_1, \quad \sum\alpha_1\alpha_2 = a_2 \dots, \quad \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = (-1)^n a_n$$

sind die elementarsymmetrischen Funktionen.

2.) $k = 1$

$$\sum \alpha_1^{\mu} = \alpha_1^{\mu} + \alpha_2^{\mu} + \dots \alpha_n^{\mu} = s_\mu$$

Die allgemeinste symmetrische F. stellt sich als Summe solcher einfachen Typen dar

ist Frage I

Frage II. Ableitung der Newtonschen Ideen.

Es ist:

$$s_1 + 1 \cdot a_1 = 0$$
$$s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0$$
$$s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_\mu + a_1 s_{\mu-1} + \cdots + \mu a_\mu = 0$$

Dadurch lassen sich $s_1, s_2 \ldots s_n$ rational durch die elementarsymmetrischen Funktionen $a_1, a_2 \ldots a_n$ ausdrücken. Auch Determinanten ausdrück.

Wir können nun unsere einfachen Typen durch die Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots s_\mu$ rational ausdrücken. Denn:

$$\varphi_1 = \sum \alpha_1^{\mu_1} = s_{\mu_1}$$

Aus

$$s_{\mu_2} \sum \alpha_1^{\mu_1} = \sum \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} + \sum \alpha_1^{\mu_1 + \mu_2}$$

folgt:

$$\varphi_2 = \sum \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} = s_{\mu_1} s_{\mu_2} - s_{\mu_1 + \mu_2}$$

Aus:

$$s_{\mu_3} \sum \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} = \sum \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \alpha_3^{\mu_3} + \sum \alpha_1^{\mu_1+\mu_3} \alpha_2^{\mu_2} + \sum \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2+\mu_3}$$

$$\sum \alpha_1^{\mu_1+\mu_3} \alpha_2^{\mu_2} = s_{\mu_1+\mu_3} s_{\mu_2} - s_{\mu_1+\mu_2+\mu_3}$$

$$\sum \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2+\mu_3} = s_{\mu_1} s_{\mu_2+\mu_3} - s_{\mu_1+\mu_2+\mu_3}$$

$$\varphi_3 = \sum \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \alpha_3^{\mu_3} = s_{\mu_1} s_{\mu_2} s_{\mu_3} - s_{\mu_1} s_{\mu_2+\mu_3} - s_{\mu_2} s_{\mu_1+\mu_3}$$

$$- s_{\mu_3} s_{\mu_1+\mu_2} + 2 s_{\mu_1+\mu_2+\mu_3}$$

und allgemein

$$\varphi_k = \text{Ganz. Rat.} (s_1, s_2 \ldots)$$

folglich auch

$$= \text{Ganz-Rat.} (a_1, a_2 \ldots a_k)$$

Also auch jede symetrische Funktion ist also Ganz. Rat F. der elementarsymmetrischen Funktionen $a_1, a_2 \ldots a_k$ darstellbar. ~~Nicht nur~~

Gleichzeitig haben wir auch eine Methode

zur wirklichen Darstellung gefunden. Aber diese Methode ist sehr umständlich. Eine schnellere Darstellung ist vielmehr mittelst folgenden Satzes möglich:

Satz:

$$\varphi_k = \sum \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \dots \alpha_n^{\mu_n} = \sum \zeta^{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n}_{1, 1_2 \dots 1_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}$$

wo ist der Grad der Funktion rechter Hand gleich der grössten Zahl der Reihe $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_k$ und es besteht ferner die Gleichung:

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots n\lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + \dots \mu_k = 1 \cdot 1_1 + 2 1_2 + \dots n 1_n$$

Beweis ist Frage III Bemerkung,

dass die $a_1, a_2, \dots a_n$ lineare Funktionen einer bestimmten Wurzel sind also:

$$a_k = \psi_1 \alpha_1 + \chi_1 = \psi_2 \alpha_2 + \chi_2 = \dots$$

Bemerk, dass die Formel auch nach einer Multiplikation der Wurzeln mit ~~der~~ 1 gültig bleibt. von Cayley und Sylvester Anwendung auf die Auswertung der symmetrischen Funktion:

$$\Sigma \alpha_1^3 \alpha_2 = A a_1^2 a_2 + B a_1 a_3 + C a_2^2 + D a_4$$

A, B, C, D müssen ganze von n unabhängige Zahlen, welche sich durch spezielle Annahmen z. B.

$$x^2 - 1 = 0 \qquad x^3 - 1 = 0$$

etc. bestimmen lassen Frage IV

anderes Beispiel: $\Sigma \alpha_1^3 \alpha_2 \alpha_3$

Wiederholung der 4 Fragepunkte, die wir am nächsten Freitag erledigen werden und es wird sich auch noch weiteres Stoff vorfinden. Hat jedmand der Herrn

vielleicht noch einen Wunsch, ~~[illegible]~~ bezüglich dieses Gegenstandes?

Die Differentialgl. lautet:

$$-\sum \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = n \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-1)\, a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots + a_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}$$

Beweis:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial \alpha_1} + \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial \alpha_1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}$$

$$\cdots$$

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}\sum \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\sum \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_1} + \cdots$$

$$\sum \frac{\partial a_i}{\partial \alpha_1} = -(n-i+1)\, a_{i-1}$$

Bestätigung ~~dto~~ an obigem Beispiel. Auch Beweis der Newtonschen Formeln.

Wir beantworten zunächst kurz die Fragen, welche ich zur Ueberlegung empfohlen hatte. $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sind Wurzeln der Gleichung $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_{n-1} x + a_n = 0$

1.) $$\mathfrak{S}_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \sum \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \ldots \alpha_n^{k_n}$$

$$\mathfrak{S}(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) = \sum C_{k_1 k_2 \ldots k_n} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \ldots \alpha_n^{k_n}$$

$$n!\, \mathfrak{S}(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) = \sum C_{k_1 k_2 \ldots k_n} \sum \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \ldots \alpha_n^{k_n}$$

$$\mathfrak{S}(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) = \frac{1}{n!} \sum C_{k_1 k_2 \ldots k_n} \mathfrak{S}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$$

2.) Beweis der Newtonschen Formeln. Herr Cohn hat:

$$s_\mu + a_1 s_{\mu-1} + a_2 s_{\mu+2} + \ldots + \mu a_\mu = 0 \qquad \mu \leqq n$$

$$s_\mu + a_1 s_{\mu-1} + a_2 s_{\mu+2} + \ldots s_{\mu-n} a_n = 0 \qquad \mu \geqq n$$

$\sum \alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \ldots \alpha_n^{l_n} = \sum C_{l_1 l_2 \ldots l_n} a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_n^{l_n}$

3.) Beweis jenes Satzes: Der Grad der Funktion rechter Hand also $l_1 + l_2 + \ldots l_n$ kann durch keine etwa k_i höchste k tatsächlich überschritten. Denn rechts kommt z. B. α_1 höchstens in der l_1. und rechts in einer höheren Potenz vor.

Die Relation ergiebt sich einfach indem wir auf beiden Seiten den Gesamtgrad in den α abzählen

$$k_1 + k_2 + \dots k_\mu = 1\cdot\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots n\lambda_n$$

4.) Beispiel $\sum \alpha_1^3 \alpha_2 \alpha_3 = \sum C_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}$

$k_1 = 3$	$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_n \leqq 3$
$k_1 + k_2 + k_3 = 5$	$1\cdot\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots n\lambda_n = 5$

$$f = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = ~~c_1(x-\alpha_1)^3 + c_2(x-\alpha_2)^3~~$$

$$L(x_1 + l x_2)^3 = M(x_1 + m x_2)^3 + ~~\dots~~$$

~~$a_0 = c_1 + c_2$~~

~~$a_1 = c_1\alpha_1 + c\alpha_2$~~

~~$a_2 = c_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2^2$~~

1.) Diese Darstellung ist möglich weil 4 Gl. und 4 Unbek.

~~mittelst der Hess-Deter~~ Aufstellung einer quadrat. Gl. deren Wurzeln l u m sind

~~$H = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$~~ $H = 0$

2.) Linear Transformation, wie sich dann jene Darstellung ändert und Beweis, dass jene linke Seite H als Form betrachtet ~~Hess. Det.~~ Covariante ist.

3.) Wann ~~ist jene~~ Darstellung nicht mehr möglich.

4.) Bemerkung zur Lösung cubischer Gleichungen.

$p = K_1 + K_2 + \ldots + K_s \qquad K_m = 0, 1 \ldots, m$

$Z(s, m) = Z(m, s)$

Beispiel $p = 8 \quad s = 3, \quad m = 5$

$\overbrace{0,1,2,3,4,5}$	$\overbrace{0,1,2,3}$
$8 = 0 + 3 + 5$	$= 0+0+2+3+3$
$= 0 + 4 + 4$	$= 0+1+1+3+3$
$= 1 + 2 + 5$	$= 0+1+2+2+3$
$= 1 + 3 + 4$	$= 0+2+2+2+2$
$= 2 + 2 + 4$	$= 1+1+1+2+3$
$= 2 + 3 + 3$	$= 1+1+2+2+2$

Wir werden das Resultat gelentlich zum Beweise einer interessanten Tabelle benutzen.

Es ist nicht nötig, alle Aufgaben zu beschäftige
Ich empfehle deshalb mehrere, damit
sich die Herren ~~nicht beide beeilt~~ nach
Geschmack und Neigung wählen kön

Mb. H. Indem wir unserer ursprünglichen Absicht zufolge die gegenwärtige Uebungsstunde in erster Linie als Studie unserer Collegs über Invariantentheorie betrachten, möchte ich mir die Frage erlauben, ob jemand von den Herrn eine Aufklärung wünscht: in betreff

1.) der Ableitung der Differentialgl.

2.) des Beweises dass nun die Eigenschaften auch zugehörig hinreichen

3.) der Auffassung der Differentiationssymbole und Beweis des letzten Satzes. $D\Delta = \Delta D + \lambda$

Besprechung der ersten Aufgabe:

$$f = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = \alpha (x_1 + l x_2)^3 + \beta (x_1 + m x_2)^3$$

$$+a_0 = \alpha + \beta$$
$$+a_1 = +\alpha l + \beta m$$
$$+a_2 = \alpha l^2 + \beta m^2$$
$$+a_3 = +\alpha l^3 + \beta m^3$$

$$a_0 l + a_1 = \beta (l - m)$$
$$+a_1 l + a_2 = +\beta m (l - m)$$
$$a_2 l + a_3 = \beta m^2 (l - m)$$

$$\frac{a_0 l - a_1}{l - m} = \beta$$
$$\frac{a_0 m - a_1}{m - l} = \alpha$$

$$\frac{a_0 l + a_1}{a_1 l + a_2} = -\frac{1}{m} = \frac{a_1 l + a_2}{a_2 l + a_3} \quad \text{d.h.} \quad (a_0 l + a_1)(a_2 l + a_3) - (a_1 l + a_2)^2 = 0$$

$$(a_0 a_2 - a_1^2) l^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) l + a_1 a_3 - a_2^2 = 0$$

$$l = -x_1' : x_2'$$

$$H = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2$$

Beweis, dass H eine Covariante ist. Denn es besitzt alle Eigenschaften, welche wir gefunden haben.

J constant, p const., $p, p+1, p+2, n = ag - 2f$;

$$DH = \frac{x}{2}\frac{\partial H}{\partial x_1} \qquad \Delta H = x_1 \frac{\partial H}{\partial x_2}$$

$$a_0 \left| \frac{\partial H}{\partial a_1} \right. = -2a_1 x_1^2 - a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2$$

$$2a_1 \left| \frac{\partial H}{\partial a_2} \right. = +a_0 x_1^2 - a_1 x_1 x_2 - 2a_2 x_2^2$$

$$3a_2 \left| \frac{\partial H}{\partial a_3} \right. = a_0 x_1 x_2 + a_1 x_2^2$$

$$DH = (2a_0 a_2 - 2a_1^2) x_1 x_2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_2^2$$

$$x_1 \frac{\partial H}{\partial x_2} = 2a_0 x_1 x_2 (a_0 a_2 - a_1^2) + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_2^2$$

Ueber die Anwendung auf Lösung der cubischen Gleichungen gehe ich hinweg, weil dieselbe keine Schwierigkeit hat und auch gegenwärtig weniger interessirt. Desto mehr interessirt und die 4te Frage nämlich die Frage der Anordnungen. Herr Cohn schliesst nämlich wie folgt und erhält

Herr Cohn erhält folgendes Resultat

$n = 1$ ist unsere Curve nothwendig $\varphi = (\alpha + \beta x_1 + \gamma x_2 + \delta x_3)^3$

Zusatz

(die interessanten Lehrheit)

2 Wiedersprüche { 1.) $m = l$ ist eine Red.
$f = \frac{1}{2}(x_1 + lx_2)^2$ sind zwei Redg. } Dennoch ist der Fehler scheinbar richtig

2.) $f = \frac{1}{2}(x_1 + lx_2)^2$ ist ja gar kein Ausnahmefall.

Da nun das Studium solcher Ausartungen nicht nur in der Theorie der Formen sondern überall in Mathematische Theorien eine wesentliche Rolle spielt, so scheint mir das gegenwärtige Beispiel doch einer näheren Ueberlegung wert. Ich schlage also als Aufgabe vor, die Wiedersprüche in den Resultaten des Herrn Cohn zu lösen d.h. und zwar auf folgende Weise:

$l = m$ ist in der That der einzige Falle, welcher eine Ausnahmebehandlung gestattet. Aber welche, das wird die Einsetzung

$$m = l + \varepsilon \qquad \varepsilon = 0$$

lehren. Ich empfehle also das Studium dieser Ausartung mit 2 Unterfällen. Richtiger Grenzübergang.

$f = a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 \ldots = \alpha (x_1 + b_1 x_2)^4 + \ldots (x_1 + m x_2)^4$

5 G. mit 4 Unbekannten. dieselben können eliminirt werden.

$J(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4) = 0$

1) welches ~~ist~~ ~~besitzt~~ diese Eigenschaft $= I$

2) I^2

3) Bestimmung dieser Function φ_j (von 3ten Grade)

2.) Beweis, dass I eine Invariante ist Ref 2 Theiss.

3.) Ist jene Darstellg möglich ev ~~und~~ linear die Wurzelpunkte harmon.

4.) Die Bedingungen Harmonische Lage (der Wurzelpunkte von f) ist $J = 0$ &c

(Aronhold und Hesse) Beweis:

$p = A_1 + A_2 + \ldots A_\rho \qquad k = 0, 1 \ldots m$

$= 0 + 0 + 0 + \ldots \alpha_0 \qquad = 0 \cdot \alpha_0 + 1 \cdot \alpha_1 + 2 \alpha_2 + \ldots m \alpha_m$

$= + 1 + 1 + 1 \ldots \alpha_1$

$+ 2 + 2 + 2 \ldots \alpha_2$

$\ldots$

$+ m + m + m \ldots \alpha_m$

$(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_m = \rho)$

$\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_m = d_1$

$\lambda_2 = \alpha_2 + \ldots \alpha_m = d_2$

$\ldots$

$\lambda_m = \alpha_m = d_m$

$\lambda = 0, 1 \ldots \rho$

$p = d_1 + d_2 + \ldots d_m$

Vorzüge meiner und Hilb. Beweis.

Frage bezüglich des Collegs. Abschnitt daher keine Unklarheiten mehr.

$$f = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = \mathcal{L}(x_1 + l x_2)^3 + \mathcal{M}(x_1 + m x_2)^3$$

$$\mathcal{H} = 0 \qquad \mathcal{M} = \frac{a_0 l - a_1}{l - m} \qquad \mathcal{L} = \frac{a_0 m - a_1}{m - l}$$

1.) Bedingung dafür ist Dis. von $\mathcal{H}$ [illegible]: $4(a_1^2 - a_2 a_2)(a_2^2 - a_1 a_3) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 = 0$

$m = l + \varepsilon$

$$f = \left\{\frac{a_0 l - a_1}{\varepsilon} + a_0\right\}(x_1 + l x_2)^3 + \frac{a_0 l - a_1}{-\varepsilon}\left\{(x_1 + l x_2)^3 + 3\varepsilon (x_1 + l x_2)^2 x_2\right\}$$

$$= a_0 (x_1 + l x_2)^3 - 3(a_0 l - a_1)(x_1 + l x_2)^2 x_2$$

$$= (x_1 + l x_2)^2 (a_0 x_1 + a_0 l x_2 - 3 a_0 l x_2 + 3 a_1 x_2) = \mathcal{L}'(x_1 + l' x_2)$$

$$= \mathcal{L}'(x_1 + l x_2)^2 (x_1 + l' x_2)$$

2.) $\mathcal{H} = 0 \qquad f = \mathcal{L}''(x_1 + l x_2)^3$

$m = \infty$

3.) $f =$

$$f(x_2 x_1) = \mathcal{L}'(x_1 + l' x_2) + \mathcal{M}' x_1^3$$

$$f = \mathcal{L}'(x_2 + l' x_1)^3 + \mathcal{M}' x_2^3 = \mathcal{L}(x_1 + l x_2)^3 + \mathcal{M} x_2^3$$

$$= l'^3 \mathcal{L}' \left(\frac{1}{l'} x_2 + x_1\right)^3$$

Besprechung nach Cohns Arbeit.

bei) 1.) Frage wann man erwarten kann, dass man eine invarianten-Kriterium $j = 0$ erhält. Eigenschaft kommt nicht nur der Form allein zu sondern: besitzt die Form die Eigenschaft einmal, so ist sie dazu verurtheilt, — hindurch zu schleppen.

Aufgaben

$f = a_0 x_1^3 + \ldots$

$f(x_1 - \lambda x_2) = b_0 x_1^4 \ldots$

1.) $i = 0$: $H = 0$

2.) $j = 0$ $T = 0$

3.) H und T sind Invarianten. Nur ihre Quelle zu berechnen nöthig.

$A(a_0 a_1 \ldots a_n)$ $DA = 0$

1.) $A = C_{a_0}^{a_n}$: $DA = 0$ Beispiel j

$D, A \qquad \Delta A = 0$

$(ng-2p)\, a_1 A - a_0 \Delta A =$

$A' = -a_0 \Delta A - (ng-2p) k_{a_0} A$

$A'' = (n'g'-2p) A' \Delta A - (ng-2p) A \Delta A'$

Anwendung auf $A = a_0$, $A' = a_0 a_2 - a_1^2$

$(n = n' = 3)$

~~$n'g'-2p \; A' D A A - (ng-p) A D A A'$~~

Nunmehr erlaube ich mir die gewünschte Frage, ob jemand von den Herrn eine Bemerkung betreff des Cayley-Sylvesterschen wünscht, vielleicht in Bezug auf das letzte Theorem.

Wenn dies nicht der Fall ist gehe ich dann über die übrigen Aufgaben an der Hand der mir eingelieferten Arbeiten.

Den zu besprechen.

Aufgabe I und II

Auch Ihr Beweis ~~wird~~ hat den prinzipiellen ~~Beweis~~ Wert eines allgemeinen Beweis, wie ~~sie~~ nur —— einwohnen haben.

$$f = a_0 x_1^n + \dots + a_n x_2^n$$

$$F = (y_1 x_2 - y_2 x_1) f = b_0 x_1^{n+1} + \dots + b_{n+1} x_2^{n+1}$$

$$b_k = \dots a_k y_2 \dots a_{k-1} y_1$$

$$(n+1) b_k = k a_{k-1} y_1 - (n-k+1) a_k y_2$$

$$\mathfrak{J}(b_0 b_1 \dots b_{n+1}) = \dots \mathfrak{J} F(a_0 a_1 \dots a_n y_1 y_2)$$

$$y_1(\alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2') - y_2(\alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2') = y_1' x_2' - y_2' x_1'$$

$$y_1' = y_1 \alpha_{22} - \alpha_{12} y_2 \qquad y_1 = \dots \alpha_{11} y_1 + \dots$$

$$y_1' = \alpha_{21} y_1 - \alpha_{11} y_2$$

$$= C_0' y_1^n y \qquad C_0' = \dots$$

ü. Z. Wir haben bis jetzt völlige Darstellungen von Invarianten u. Covarianten kennen gelernt, wo dieselben direkt als Funktionen der Coefficienten und Variablen gegeben sind. Neben dieser unmittelbaren und natürlichsten Darstellung werden wir jedoch noch andere kennen lernen, welche allerdings stets auf jene ~~reduziert~~ zurückführen, aber natürlich ihrerseits ebenfalls ~~ihre~~ specifische Vorteile haben. Darst. durch linearfaktoren

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots a_n x_2^n$$
$$= a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots$$

$$f_0 = f$$

$$f_1 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_2 = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_3 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

1.) $(a_0 a_2 - a_1^2) x^{2(n-2)} + \dots = f_0 f_2 - f_1^2$

2.) $(a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x^{3(n-2)} = -(f_0^2 f_3 - 3 f_0 f_1 f_2 + 2 f_1^3)$

3.) Deutung von $(S,L)_2 = 0$

Für den Fall der cubischen Form hatten wir schon gelegentlich eine Deutung gefunden. Versuchen Sie also dieses Resultat wieder zu finden durch Integration

4.) Beweis für $T = 0$

Die Integration ist allgemein möglich. Versuch zunächst mit der cubischen oder biquadratischen Form.

5.) Warum ist eine cubische Invariante oder Covariante zweiten Grades nicht möglich?

a. Abzählung der Bedingungsgleichungen.

b. mittelst der Sätze in § 7 übergehend

6.) Warum existirt nicht eine cubische Invariante.
Die letztere Frage ist auch für eine mündliche Beantwortung sehr geeignet, und ich

darf ich dieselbe

~~nur bemerke wen~~ vielleicht ~~jemand so~~

den Herren ~~sie~~ Ihr. ~~[illegible]~~ in diesem Sinne

~~für wert hätte~~ der Beachtung ~~[illegible]~~ bestens empfehlen

Ab. H. Bemerkung wegen der Collego?

1) Nun Deruyts vorgeschlagen.

$$C = C_0 x_1^m + \Delta C_0 x_1^{m-1} + \dots$$

$$= C_0(f_0, f_1 \dots f_m)$$

$$f_0 = f, \quad f_1 = \frac{1}{n} f_1, \quad f_2 = \frac{1}{n(n-1)} f_2$$

Herr Hirsch, Sie beweisen durch Substitution. Ich möchte hier noch eine andere Art kurz zur Sprache bringen:

$$C_0(f_0, f_1 \dots f_m) = \pm \left\{ C_m x_2^m + D C_m x_2^{m-1} x_1 + \dots \right\}$$

$$C_0(a_m\, a_{m-1} \dots a_0) = \pm C_m$$

$$\left[\frac{\partial C_0}{\partial f_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_1} + \frac{\partial C_0}{\partial f_{m-1}} \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial C_0}{\partial f_{m-2}} \frac{\partial f_{m-2}}{\partial x_1} + \dots \right]_{x_1 = 0} = D C_m x_2^{m-1}$$

$$\left[\frac{\partial C_0}{\partial f_{m-1}} f_m + 2 f_{m-1} \frac{\partial C_0}{\partial f_{m-2}} \right]_{x_1=0} = a_0 \frac{\partial C_m}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial C_m}{\partial a_2} + \dots$$

~~W~~ Man sieht, dass man die Covariante auch wie folgt ~~auf~~ bestimmen kann.

Wir erhielten die Darstellungen

$$H = \gamma(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^{2(n-2)} + \dots = f_0 f_2 - f_1^2$$

$$-T = -(a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x^{3n-3?} + \dots = f_0^2 f_3 - 3 f_0 f_1 f_2 + 2 f_1^3$$

1.) Aufstellung der Tetraeder Form / Verlegung in die Ecke

2.) Herleitung ihres invarianten Kriteriums, wobei aber zur Vermeidung überflüssiger Rechnung immer die Invarianten in Frage kommen.

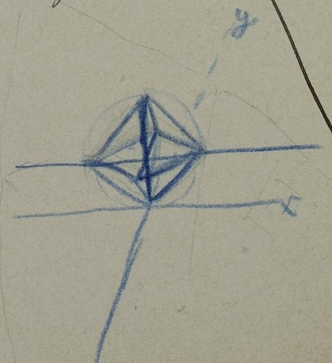
3.) Berechnung der Covarianten Φ, H und T

4.) Aufstellung der Oktaeder Form Verlegung in eine Ecke.

5.) Berechnung von $(\varphi, f)_2$ und $(\varphi, f)_4$ am leichtesten mittels Einseitiger Differentialprozessen.

6.) Aufstellung der Hexaeder Form.

7.) Berechnung von $(\varphi, f)_4$



$$\frac{f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{n(n-1)} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}^2}{n^2} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{n-1}{n}\,\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} \quad \Big| \quad l\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{n-1}{n}\, l f, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\, f^{\frac{1}{n}-1} = C.$$

$$f^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} C x + C' = \alpha x + \beta, \quad f = (\alpha x + \beta)^n$$

Die beiden letzten mündlichen Fragen!

Die Arbeiten durchsehen.

1.) Was folgt, wenn wir jene Ueberlegung auf die Diskriminante anwenden? Bestätigung an den drei Beispielen $n = 2, 3, 4$. Kann man ~~die~~ erhaltene ~~gegebenen~~ ~~folgende~~ Diskriminanteneigenschaft zur Berechnung der Diskriminante für die Form $n+1$ter Ordnung verwenden, wenn man diejenige $n$ter Ordnung kennt.

2.) Begriff der stereographischen Projektion

3.) Oktaedergleichung. $\sigma = 0$ $\quad (f,f)_2,\ (f,f)_4$

$\Phi = x_1^4 + 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = 0$ $\quad i,\ H,\ T$

$G = H,$ $\quad i,\ H,\ T$

$W = \Phi H$ $\quad (f,f)_4$

Für $j = 0$ wird H ein vollständiges Quadrat. Wie ist dieser scheinbare Widerspruch zu erklären. Eine Bedingung hat eine zweibedingte entsprechende Folge. Wenn Sie mal genauer eindringen will, so [illegible] sich auch die für $j = 0$ mögliche Darstellung als Potenzsumme.

$$O = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) \qquad (O,O)_4 \,, (O,O)_2$$

$$T_1 = x_1^4 + 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4$$

$$T_2 = x_1^4 - 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4 \qquad \Big\} \; i, H, T$$

$$W = x_1^8 + 14 x_1^4 x_2^4 + x_2^8 = T_1 T_2 \qquad (W,W)_4 \,, (W,W)_6 \,;$$

Jede Drehung der Kugel um einen Mittelpunkt bewirkt eine lineare Transformation der abgebildeten komplexen Variabeln gleich. Ebene

M. H. Da wir in der Theorie nun schon weiter fortgeschritten sind und nun vor auch schon an schwierigere und tiefer liegende Probleme

heranmachen können, so möchte hier für die Ueberstunde in der Folge den Modus einführen, dass wir neben den fortlaufenden Uebungsaufgaben und Fragen in ein größerer Turnus Gemeinschaftlich behandeln. Als Stoff dafür möchte ich vorschlagen dasjenige, auf welches wir durch Verallgemeinerung jener letzten Aufgabe geführt. Dasselbe ist einerseits neu und wissenschaftlich fruchtbar. Andererseits praktisch und interessant, wenn wir nur erst die [illegible] Punkte hineingebracht haben.

$f, \quad C = f_0 x_1^m + \ldots \qquad C = \varphi(a)$

1.) $m = n$, [illegible] f — C

(C — $f; f'; f'' \ldots$

Eine Bedingung an C gestellt ist einer Bedingung für die f —

f — einer für C

Wann tritt eine Ausnahme ein

1.) wenn C speziell ist ohne eine Relation oder so wie so.

2.) Wenn $f f' \ldots$ nicht distinct. Dann wird nicht einer Bedingung für f auch eine für C entsprechen.

Wenn wir also die Stellung x vor uns haben, so muss einer der beiden Fälle eintreten. Diese Bedingung wollen wir die ~~für die~~ charakteristische Gleichung der in Rede stehenden Covariante nennen.

Welches ist die charakteristische Gl. der Covariante T für die cubische Form?

1.) Besprechung der Beziehungen zwischen Oktaeder, Würfel. Klein: über das Ikosaeder. Allgemeinere Körper.

2.) Kugeldrehung. Die Form bestimmt also den Körper als solche in Transformation in sich.

Aufgaben 1.) ~~Unbestimmte Bedingung. existirt~~ Geg. ist eine biquadratische Grundform f. Unter welcher Bedingung existirt für dieselbe a.) eine ~~quadratische~~ Form φ zweiter Ordnung b.) eine Form φ dritter Ord. c.) eine Form φ 4ter Ordnung, so dass

$$(f, \varphi)_2 = 0$$

Invariante Bedingung und wird sich leicht durch i, j ausdrücken lassen. ~~Um~~ Um uns den Begriff der Simultaninvariante geläufig zu machen.

Etwas schwerer, aber recht fein ist folgende Frage:

2.) Vorgelegt sei eine binäre Form s^{ter} Ordg. Unter welcher Bedingung besteht für dieselbe eine andere, ~~so dass~~ Form φ s^{ter} Ordg, so dass

$$\varphi_1 \varphi_3 = 0$$

Die Lösung dieser Frage führt auf die Invariante ν so wie $\nu = 0$ ist.

Darstellung der in Frage kommenden Invariante und Determinantenbildungen.

Über das algebraische Verhältniss einer binären Grundform zu einer C_0-variante.

f Ord. n.

C Ord. m $\quad C_0, C_1 .. C_m = \mathfrak{GR}$ ~~Alg.~~ von $a_0, a_1 .. a_n$

1.) $m = n$

$C_0 = \mathfrak{GR}(a_0 .. a_n)$

$C_m = \mathfrak{GG}(a_0 .. a_n)$

n Gl. mit n Unbekannte:

$a_0 = \text{Alg. } F(C_0 .. C_m)$

$a_n = \text{Alg } F(C_0 .. C_n)$

2.) $m < n$

$C_0 = \mathfrak{GR}(a_0 .. a_n)$

$C_m = \mathfrak{GR}(a_0 .. a_m)$

m Gl. mit n Unbe. ~~$n = m + \nu$~~ $\nu = n - m$

$a_0 = \text{Alg } F(C_0 .. C_m \rho_1 \rho_2 .. \rho_\nu)$

$a_n = \text{Alg } F(\quad)$

3.) $m > n$

$C_0 = \mathfrak{G}$ —

$C_m = \mathfrak{GR}$ —

m Gl. n Unbek $\quad \mu = m - n$

$\mathfrak{GR}(C_0 .. C_m) = 0$ in der Zahl μ bestehen

~~$C_0 = \text{Alg. } F.(\rho_1 \rho_2 .. \rho_\mu)$~~

~~a_n~~ $a = \text{Alg } F(C_0 .. C_m)$

Wir nennen nun ν die Mannigfaltigkeitszahl $= 0$ in 1.) und 3.) ~~$\nu = m - n$~~ $= (n - m)$ in 2.)

Die Zahl der Bedingungen ist $\mu = 0$ in 1. und 2.) und $= m - n$ in 3.)

1.) Die charakteristische Gleichung ist diejenige Bedingung für die Coefficienten der Grundform, deren Erfüllung eine Erhöhung der Mannigfaltigkeitszahl ν mit sich bringt.

2.) Das Erfülltsein der charakteristischen Gleichung hat ~~zur Folge, dass~~ für die Covariante die ~~Folge~~, dass ihre Bedingungszahl μ sich nun mehr als die Einheit erhöht.

3.) ~~Die Umgekehrt~~, ~~Es~~ hat das Erfülltsein einer Gleichung zwischen den Coefficienten der Grundform eine solche mehrfache Erhöhung der Bedingungszahl μ ~~der~~ zur Folge, so ist die betreffende Gleichung die charakteristische Gleichung.

Beispiel die Hessische der binaren Form $f(x,y)=0$

Welcher ist Δ die charakteristische Gleichung für die Covariante H und T für die cubische Form

Welcher ist die charakteristische Gleichung für die Covariante T für die biquadratische Form.

Fragen 1.) wie findet man die Formen φ in der ersten Frage von vorhin? bei: a.) b.) c.)

ad Eindeutige und der invarianten Natur entsprechende Lösung der Aufgabe, wenn wir also neue Gleichg. und

$$\varphi = \alpha_0 x_1^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2$$

hinzufügen und φ zu bestimmen. Wir werden dabei eine Reihe der ~~Det~~ so entstehenden Determinante zur ~~Verf~~ willkürlichen Verfügung haben und diese ~~ge~~ gerade so und symmetrisch durch eine neue Variablenreihe $y_1 y_2$ ausfüllen. Kurz läuft auf eine Änderung der früheren Determinante hinaus: Setzen wir nämlich $y_1 = x_1, y_2 = x_2$, so werden wir auf ~~Ausdrücke~~ Determinante kommen die sich leicht ausrechnen lassen und diese geben dann auch die gesuchten Lösungen.

} In 1.) ist auch Frage nach $i(F) = j(F)$ zu erledigen.

2.) In Aufgabe 2.) von vorher war vorgelegt eine ~~Form~~ Form 5ter Ordg. und es wurde die Bedingung gesucht, dass eine andere existiert, so dass $(f,\varphi)_3 = 0$ a.) f,φ verbinden aber ohne Rechnung durch spezielle Annahme und dann b.) die Invariante der gefundenen Bedingung aufsuchen, was eine nur vollbehandelte Form 8ter Ordnung sein wird.

3.) Bedingung für $f_x(x=6)$, damit $\varphi(x=6)$ existiert, so dass

$$(f,\varphi)_3 = 0$$

ist. Auch ohne Rechnung nach ~~de~~ Determinanten überlegungen und Änderungen. Zu beachten, dass wiederum ~~$\varphi = \varphi$~~ ~~ein~~ $\varphi = f$ eine Lösung ist.

4.) $n=3$ $r=3$ $(f,\varphi)_2=0$ $\varphi = ?$

Umgekehrt was folgt für f?

$(f,\varphi)_4=0$ $f=\varphi=7$ Charakteristische Gleichung

$(f,\varphi)_{3,2}$ bei der Form 5ten Grades und biquadratische Covariante.

Combinante $(f,\varphi)_3=0$ $(f,\varphi)_1=?$ Hyperg. Reihe, Ungleichheit. Discriminante derselben.

Reduzierungszahl μ
Mannigfaltigkeitszahl ν

1.) $f=a_0x_1^3+\ldots$ H: $\mu=0, \nu=0$
$d=0$: $\mu=2, \nu=1$

2.) $f=a_0x_1^4+\ldots$ (a.) H: $\mu=0, \nu=0$
$j=0$: $\mu=2, \nu=1$
T: $\mu=2, \nu=0$
$27j^2-i^3=0$: $\mu=4, \nu=1$

Ein Formenbüschel $f+\lambda\varphi$ ist durch die Bedingung $(f,\varphi)_3=0$ im Allgemeinen vollständig charakterisirt. Denn $2n-3-2=2n-5$ $=2n-6+1$. Diese speziellen Formenbüschel finden nach Analogie der beiden aequivalenten Formen $n=5$:

1.) $f = x_1^5-5x_1x_2^4$ 2.) $f = 2x_1^5+5x_1^2x_2^3 = x_1^5+10x_1^2x_2^3$

$\varphi = -5x_1^4x_2+x_2^5$ $\varphi = 5x_1^3x_2^2-x_2^5 = 5x_1^3x_2^2+4x_2^5$

$(f,\varphi)_1=x_1^8+14x_1^4x_2^4+x_2^8$

$X=x_1^4+2\sqrt{-3}x_1^2x_2^2+x_2^4$
$X_1=x_1^4-2\sqrt{-3}x_1^2x_2^2+x_2^4$

für $n=3$, 4, 6, $f\cdot X h_4=x_1^8+14x_1^4x_2^4+x_2^8$ $(f,\varphi)_1=x_1^7x_2+7x_1^4x_2^4-8x_1x_2^7$
$(\varphi=x_1^3x_2-x_2^4$, $h_4=x_1^4+8x_1x_2^3)$

Ferner die andere Combinante (f,φ), die auch hinreichend den Büschel charakterisirt, und $(f,\varphi)_5$, $(f,\varphi)_7$ bilden.

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha\,\alpha+1\;\beta\,\beta+1}{1.2\;\gamma\,\gamma+1}x^2 + \ldots$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{-\alpha}\,F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \frac{x}{x-1}\right)$$

$\underline{\alpha(\alpha+1)\ldots\qquad(\alpha+n) = 0}$

$\alpha = -n, \quad x = -\frac{x_2}{x_1}$

$$f(\beta,\gamma;x_1,x_2) = x_1^n + \binom{n}{1}\frac{\beta}{\gamma}x_1^{n-1}x_2 + \binom{n}{2}\frac{\beta\,\beta+1}{\gamma\,\gamma+1}x_1^{n-2}x_2^2 + \ldots + \frac{\beta\,\beta+1\ldots\beta+n-1}{\gamma\,\gamma+1\ldots\gamma+n-1}x_2^n$$

$(f,f)_n$ für gerades n $= ?$

1.) Nennerfreimachen $U =$ g. Rat. von β,γ

2.) Absondern von gewissen in jedem Gliede vorkommenden Faktoren

3.) Benutzung der Invariantereigenschaft, bei gewissen lin. Transf.

4.) Bestimmung der Constante.

5.) Uebergang zur nennerbehafteten Form f.

Beispiel: $\beta = -n,\ \gamma = 1\ :\ f = x_1^n + \binom{n}{1}^2 x_1^{n-1}x_2 + \binom{n}{2}^2 x_1^{n-2}x_2^2 + \ldots + x_2^n$.

$\binom{n}{0}^3 - \binom{n}{1}^3 + \binom{n}{2}^3 - \ldots = \frac{\Pi 3\nu}{(\Pi(\nu))^3}$

$n = 3 \quad x^3 + 3x \qquad n = 4 \quad x^4 - 4x \qquad\qquad n = 7 \quad y_1^7 + 7y_1 y_2^{\ldots}\ \ 7y_1^5 - y_2^7 \quad y_1^{10} - 11y_1^5 - 1$

$\quad x^2 - 1 \qquad\qquad 2x^3 + 1 \qquad x^6 - 6x^3 + 2 \qquad x_1^{12} + 22x^6 + 13$

Diskriminante $= R(\beta,\gamma)$ wird $= 0$ 1.) für Doppelwurzel x_1, 6.) für Doppelwurzel x_2 der ersten & dritten für $\beta\beta+\ldots = 0$ der letzteren für $\gamma\gamma+1\ldots = 0$. Die Diskriminante enthält alle diese Faktoren aber nicht alle in gleicher Weise sondern in höheren Potenzen. Dazu Verwendung der folgenden Sätze: Ansatz machen und gewisse lineare Substitution anwenden. Gradabzählung stimmt. Und wir haben dann $Di = N\,F(\beta,\gamma)$.

1. $(f, \varphi)_3 = (f, \varphi)_1 = \psi$, $(\psi, \psi)_4 = \psi$ als Faktor.

2.) $f = a_x^5$ $(f, f)_4 = i_x^2$ $(i, i)_2 = A$ voll symbolisch dargestellt und als einzige erwiesen werde.

3.) Form = Punkt. ~~a.) Welche Punkte ent~~ Wo liegen die Punkte, deren Quadrate entsprechen Koordinaten einer Kegelschnitts b.) Deutung einer Linear Form als Punkte des Kegelschnittes. c.) Wie findet man die Linearfaktoren eines gegebenen Punktes? d. Welches ist die Gleichung der Polare eines Punktes? e.) Wie ~~gestalten~~ Zusammenhang sich die Theorie der linearen Transf. einer Kegelschnitts in sich.

f.) ~~Deutet man die kubische Form durch 3 Punkte, wie deutet man die Hessische?~~ Wie deutet man die Theorie der φ-ψ-χ Forme bei der biquadratischen Grundform.

Ueber Cölley zu fragen?

Aufgabe besprechen 1.) Die Invariante 4ten Grades.. 2.) Die apolare Aufgabe.
3.) Die 4te Ueberschiebung enthält die Form selbst als Faktor

Aufgabe. ~~Der~~ Der Wert der Ideen würde bedeutend erhöht wenn man ihr numerische Wünsche. 8 Redingen doch eigentlich zu viel.

Für drei Dimensionen: Form = Punkt a.) Wo liegen die Punkte, denen Linear entsprechen b.) Deutung eines Linearfaktors als Punkt dieses Gebildes c.) Wo liegen alle die Punkte die einen bestimmten quadratischen Faktor enthalten. d.) Wo die Punkte, die einen bestimmten linearen Faktor enthalten (Rückkehrkurvenfläche) e.) Wie findet man die 3 linearen Faktoren eines beliebigen Punktes?

Rückkehr zur allge. Aufgabe über den Algebraischen Zusammenhang zwischen Grundform und Covariante:

$f^{(n)}$ $\quad F^{(m)}$

$i_1 \dots i_{n-2}$ $\quad J_1 \dots J_{m-2}$ $\quad J = R(i)$

1.) $m > n$ (Herrscht der Fixpunkt Bedg.) 2.) $m < n$ 3.) $m = n$. $f = (6)$ $i = (4)$

1.) $n = 3$ $F = 9$
2.) $n = 4$ $F = H$
3.) $n = 5$ $F = C = a_0^2 a_5 - 5 a_0 a_1 a_4 + 2 a_0 a_2 a_3 \; (+ 8 a_1^2 a_3 - 6 a_1 a_2^2)$
4.) $n = 6$ $F = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} x^6 + \dots$

Das sind sehr hübsche Fragen doch nicht ohne Rechnung durchkommen.

$f = a_x^6$ hat folgende Invarianten:

1.) $a = a_0 a_6 - 6 a_1 a_5 + 15 a_2 a_4 - 10 a_3^2$

2.) $b = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_3 \\ & & & a_6 \end{vmatrix}$

3.) $c = (f, f)_6 = (6)$

4.) d = Die Diskriminante (10)

1.) $A = 2c + 2'ab + 2''a^3$

2.) $B = c^2 + c(ab + a^3) + a^6 + a^4 b + a^2 b^2 + b^3$

3.) $C = c^3 + c^2(ab + a^3) + c^2(\quad)$

$+ a^8 + a^7 b + a^5 b^2 + a^3 b^3 + a b^4$

4.) $D = b^3 \Big\} c^3$

Wir haben noch den Vorzug nicht mit der vierten Invariante rechnen zu haben.
Der Ansatz ist der dass die obige Invariante für die Form

$$\varphi = \varphi^2$$

$$f = a_0 x_1^6 + 6 a_1 x_1^5 x_2 + a_6 x_2^6$$

berechnet werden. Wir wollen dann den Rest nur ver-

suchen alle Invarianten zu bestimmen. Ich habe nun heute eine ähnliche Alternative aufgeworfen. Aber es ist ja schon von grossem Werth wenn Sie mir Ihre Gedanken darüber mittheilen.

1.) Wie und auf wieviel Weisen ist ein f vom 5ten Grad in die Gestalt $a_1 = 0 \quad a_4 = 0$ durch lineare Substitution überzuführen.

Aufl. Mittelst einer gewissen Elimination und Besetzung einer Covariant, deren Faktoren zu bestimmen sind.

Frage. Welchen Zusammenhang hat diese Aufgabe mit derjenigen einer quadratischen Form ψ, so dass

$$(\varphi, f)_2 = \varphi\psi$$

Die Aufgabe ist für 4ten und 6ten Grad ausführlich lehrreich.

2.) $$f = a_0 x_1^5 + \dots + a_5 x_2^5 \qquad F = (a_0^2 a_5 - 5 a_0 a_1 a_4 + 2 a_0 a_2 a_3 + 8 a_1^2 a_3 - 6 a_1 a_2^2) x_1^5 + \dots$$

$a_0 = 1 \quad a_1 = a_3 = a_5 = 0$

$a_2 = k \quad a_4 = 1$

a_4 = Disk. von i $\quad i = (f, f)_4$ $\qquad A_{12} =$

b_8 = Disk. von f $\qquad B_{24} =$

c_{12} = Disk. von j $\quad j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 1 & -x & +x^2 & -x^3 \end{vmatrix}$ $\qquad C_{36} = \qquad + I^2$

Den zweiten Typus von Formen $(f,\varphi)_5 = 0$ finden

$$f = x_1'^{n-2} x_2'^2 + k x_2'^n \qquad (f,\varphi)_1 = 2$$

$$\varphi = x_1'^n + l x_1' x_2'^{n-2} \qquad (f,\varphi)_5 = 2$$

Wirum $n = 7$ erschöpfen diese beiden Typen alle Formen $(f,\varphi)_5 = 0$.

$$f = a_x^5 \qquad a_x^4 a_y = 0 \qquad a_x a_y^4 = 0$$

$$\frac{y_1}{y_2} = -\frac{a_2 a_1^4}{a_1 a_1^4} = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$b_1(b_1 a_1 - b_2 a_0)^4 \qquad (b-a)^4 = a_4 - 4 a_3 a_1 + 6 a_2 a_1^2 - 4 a_1 a_1^3$$

$$+ a_0 a_1^4$$

$$= a_0^3 a_4 - 4 a_0^2 a_1 a_3 + 6 a_0 a_1^2 a_2 - 3 a_1^4$$

$$= a_0^2 (a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) - 3 (a_1^2 - a_0 a_2)^2$$

$$= f^2 i - 3 h^2$$

Also 6 quadratische Formen nicht mehr und nicht weniger. Die Gl. 6ten Grades besitzt wahrscheinlich ein Affekt;

$$(f,\varphi)_2 = \varphi\psi \qquad \varphi = \sum \alpha_i x_i^2$$

welche

Verallgemeinerung für beliebiges n. Für $n = 6$ ist jener Affekt bekannt und führt auf das Problem, eine Form von x vorgeschriebenen f oder ein Formenbüschel mit vorgeschriebener Covariante zu construiren.

$$2\lambda\mu(\mu\lambda+2\mu^2)(2\mu\lambda+3\mu^2)+2\cdot 3\mu\lambda^2\cdot 2\mu(2\mu\lambda+3\mu^2)+3\lambda^2(\mu\lambda+2\mu^2)^2$$

$$= c_1\mu^3(\mu\lambda-\mu^2)^4 + c_2\mu^3\lambda^3(\mu\lambda+3\mu^2)^3 + c_3\mu\lambda(\mu\lambda+2\mu^2)(\lambda^3\mu)(\mu\lambda-3\mu^2)^2$$

$$c_1 10^4 = c_2 2^3 \qquad c_1 5^4 = c_2 3^3 4$$

n $\quad$ ν

φ gen. φ gen. und ψ gen.

Wenn eine Fm φ Grad n Grad ν

$$(\,,\varphi)_i = 0$$

existirt, so existiren ∞^{n-2i} Fm ψ von der Ordnung: $n+\nu-2i$

$$(\,,\psi)_{n-i} = 0$$

$$n+\nu-2i+1 = n-1 \qquad \nu+1$$

i

n

$\infty^{n-\nu-1}$ Fm $n-1$ Grad.

$$n+n-1-2i = \nu$$

$$2i = n+n-1-\nu \qquad i = \frac{n+n-1-\nu}{2}$$

$$2n+n-2i+1$$

$$\varphi_0 = \frac{n\,n-1}{2}x^{n-2} + n$$

$$\varphi_0 = x^n + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}$$

$f^6 = a_0 x_1^6 + 6a_2 x_1^4 x_2^2 + 15 a_4 x_1^2 x_2^4 + a_6^1 = 0, \; a_5^1 = 0$

$(\varphi, \psi)^2 = \varphi \psi$

$\varphi_{11} = (\varphi^4, \psi^4)_1$

$(\varphi, \psi)_2 = \varphi \psi$

$\mathcal{F} = j(\varphi)$

6) die lineare Transformation im binären Gebiet mit ihre Scharanlage und Typen. Dasselbe für 3 Variabeln. Aber für n Variabeln bisher noch nicht erledigt.

Diskriminanten und Resultanten

S. 211 – 219, 127–134, 448, 78–120
F 86–93, 50–85, 275–288
C 78–98

Symmetrische Funktionen

S 444, 67–76,
F 1–49, 302

Berechnung der Anzahlen.

S. 121–139, 193–200, 262–268
C 300

Tschirnhausen Transformation

C 269 S. 328

Elliptisches Normalenproblem F 230
Wendepunktsproblem C 234
Determinanten Cubik S 1–66
Satz 7: F 71 Satz 4: F 91

Professor Hilbert. 353.
Augustastr. 4.

Ausgewählte Kapitel aus der Invariantentheorie.

1 stündig.

Sommersemester 1893.

Ausgewählte Capitel aus der Invariantentheorie.

§ 1 Der Begriff der Invariante

Das allgemeine Problem der ~~[illegible]~~ algebraischen Invariantentheorie ist folgendes: Gegeben ist eine oder mehrere Formen mit einer oder mehr Veränderlichen. Wir nehmen der Reihe nach eine Form mit 2 homogenen Veränderlichen etc. Colleg Invariantenth. I § 3 ~~[illegible]~~ Für $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sage $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Beispiel der binären quadr. Form. Definition der Simultaninvariante 2er binärer Formen.

~~[illegible]~~ Die Zerlegung derselben in elementare Colleg I § 4.

§ 3 Eigenschaften der Invarianten Colleg I § 4.

z. B. Für 2 lineare Formen $a_0 x_1 + a_1 x_2$, $b_0 x_1 + b_1 x_2$ ist $a_0 b_1 - a_1 b_0$ die Invariante. Nimmt man insbesondere eine ~~[illegible]~~ Form n ter Ordg und eine lineare Form $b_0 x_1 + b_1 x_2$, so:

$$b_0(\alpha x_1' + \beta x_2') + b_1(\gamma x_1' + \delta x_2') = b_0' x_1' + b_1' x_2'$$

d. h.
$$b_0' = \alpha b_0 + \gamma b_1 \qquad b_0 = \frac{1}{\Delta}(\delta b_0' - \gamma b_1')$$
$$b_1' = \beta b_0 + \delta b_1 \qquad b_1 = \frac{1}{\Delta}(-\beta b_0' + \alpha b_1')$$

oder wenn $b_0 = y_2$, $b_1 = -y_1$, $b_0' = y_2'$, $b_1' = -y_1'$ gesetzt wird, so geht die Simultaninvarianten = Definitionsgl. über in die Definitionsgl. der Covariante und umgekehrt aus jeder Covariante kann man eine Simultaninvariante einer Form n ter Ordg u. einer Linearform machen.

§2 Die binäre lineare Transformation.

Die Zerlegung derselben in elementare Colleg I §2

§ 3. Eigenschaften der Invariante. Colleg I §4.

§ 4 Die Symbole D u. Δ (olleg §5.

§ 6 Die Anzahl der Invarianten vom Grade ν

$-2p+n\nu$ heisst den Excess ε. Zunächst beweise: Es giebt keine Funktion A derart, dass $\Delta A = J$ = Invariante ist. Zum Beweise bilde man $DA, D^2A, \ldots$ Der Excess von A ist $= +2$. Nun sei $D^\kappa A = 0$, $D^{\kappa-1}A \neq 0$, so $(D^\kappa\Delta - \Delta D^\kappa)A = \kappa(n\nu - 2p + \kappa - 1) D^{\kappa-1}A = 0$ d.h. $\kappa+1 = 0$, was nicht der Fall sein kann.

Nun sei nun die Zahl der Invarianten $J_1, \ldots J_m$ und h die Anzahl der übrigen Glieder $G_1, \ldots, G_h$ vom Grade ν und dem Excess 0. Die Anzahl aller Glieder vom Grade ν und dem Excess $+2$ sei k. k ist höchstens $= h$. Dann wäre $k > h$ so (da) wären lineare $\Delta\mathfrak{K}_1, \ldots \Delta\mathfrak{K}_k$ = lineare Combinationen von $J_1, \ldots J_m$ $G_1, \ldots G_h$ sind, so an hieraus die $G_1 \ldots G_h$ eliminiren und hätte somit jeden Falls eine Relation von der Gestalt $c_1\Delta\mathfrak{K}_1 + c_2\Delta\mathfrak{K}_2 + \cdots + c_k\Delta\mathfrak{K}_k + \gamma_1 J_1 + \cdots + \gamma_m J_m = 0$ d.h. $\Delta\mathfrak{K} = J$, wenn $\mathfrak{K} = c_1\mathfrak{K}_1 + \cdots + c_k\mathfrak{K}_k$, $J = -\gamma_1 J_1 - \cdots - \gamma_m J_m$ setzen. Hier ist nicht möglich falls $k \leqq h$. Nun ist andererseits

§ 5 Das kleinste System der Bedingungen für die Invariante (Colleg §6)

Es liegt nahe hieraus die Anzahl der Invarianten vom Grade ν zu berechnen und zwar $= W(\nu, p) - W(\nu, p-1)$. Aber wesentliche Schwierigkeit besteht dann, dass man nicht weiss ob die linear Relationen von einander unabhängig sind.

die Anzahl der Invarianten vom Grade r mindestens gleich der Anzahl der Glieder vom Exponenten p weniger der Anzahl der Glieder vom Exponenten $p-2$ d.h. $m \geqq n+h-k$ oder $k \geqq h$ und gefordert $k = h$ d.h. $m = w(r,p) - w(r,p-1)$, was bewiesen werden sollte.

z.B. $n=4$, $r=2$, $p=4$ $w(2,4) = 3$ $w(2,3) = 2$ $w(2,4) = 1$
aber diese Berechnung ist für grössere Zahlen sehr beschwerlich. Daher:

§ 7 Die Zahl $\omega(r,p) = w(r,p) - w(r,p-1)$

$w(r,p)$ ist die Anzahl der Lösungssysteme von $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_n = r$
$1\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots n\nu_n = p = \frac{nr}{2}$

Schreiben wir $p = \underbrace{0+0+\cdots+0}_{\nu_0 \text{ mal}} + \underbrace{1+\cdots+1}_{\nu_1 \text{ mal}} + \underbrace{2+\cdots+2}_{\nu_2 \text{ mal}} + \underbrace{n+n+\cdots+n}_{\nu_n \text{ mal}}$, so erkennen wir dass jene Zahl

$w(r,p)$ = der Zahl der Darstellung der Zahl p als Summe von r Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, n$ und daher ist

$$w(r,p) = \left[\frac{1}{(1-y)(1-xy)(1-x^2y)\cdots(1-x^{n}y)} \right]_{x^p y^r}$$

$$[\,] = 1 + C_1 y + C_2 y^2 + \cdots$$

$$(1-y)[\,] = (1 - x^{n+1}y)\left(1 + C_1 xy + C_2 x^2y^2 + C_3 x^3y^3 + \cdots\right)$$

und wenn wir die Koeffizienten von y^r auf beiden Seiten vergleichen:

$$C_r(1-x^r) = C_{r-1}(1-x^{n+r}), \quad C_r = \frac{1-x^{n+r}}{1-x^r} C_{r-1}$$

$$C_r = \frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\cdots(1-x^{n+r})}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^r)}$$

Also $w(r,p) = \left[\text{[illegible]} C_r \right]_{x^p}$

$$= \left[\frac{(1-x^{n+1}) \cdots (1-x^{n+r})}{(1-x) \cdots (1-x^r)} \right]_{x^p}$$

und daraus

$$w(r,p) = \left[\frac{(1-x^{n+1}) \cdots (1-x^{n+r})}{(1-x^2)(1-x^3) \cdots (1-x^r)} \right]_{x^p}$$

z. B. $n = 2$. $\quad w(r,r) = \left[\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})}{1-x^2} \right]_{x^r} = \left[\frac{1}{1-x^2} \right]_{x^r}$

$= 0$ wenn r ungerade

$= 1$ wenn r gerade ist.

d. h. $a_0 a_2 - a_1^2 = A$ ist die einzige Invariante

$n = 3 \qquad w\left(r, \frac{3r}{2}\right) = \left[\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})(1-x^{r+3})}{(1-x^2)(1-x^3)} \right]_{x^{\frac{3r}{2}}}$

$$= \left[\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} \right]_{x^{\frac{3r}{2}}} - \left[\frac{x^{r+1}(1+x+x^2)}{(1-x^2)(1-x^3)} \right]_{x^{\frac{3r}{2}}}$$

$$= \left[\frac{1}{1-x^2 1-x^3} \right]_{x^{\frac{3r}{2}}} - \left[\frac{x(1+x+x^2)}{1-x^2 1-x^3} \right]_{x^{\frac{r}{2}}} = \left[\frac{1}{1-x^2 1-x^3} \right]_{x^{\frac{3r}{2}}} - \left[\frac{x}{1-x\,1-x^2} \right]_{x^{\frac{r}{2}}}$$

und wenn man nun x mit x^2 vertauscht

$$w\left(r, \frac{3r}{2}\right) = \left[\frac{1}{1-x^4\,1-x^6} \right]_{x^{3r}} - \left[\frac{x^2}{1-x^2\,1-x^4} \right]_{x^r} \qquad \left(\text{zur Abkürzung: } 2,4,6 = 1-x^2, 1-x^4, 1-x^6 \right)$$

$$= \left[\frac{1}{4.6} \right]_{x^{3r}} + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2.4} \right]_{x^r} = \left[\frac{1}{4} \right]_{x^r} + \left[\frac{1}{4.6} \right]_{x^{3r}} - \left[\frac{1}{6.12} \right]_{x^{3r}}$$

$$= \left[\frac{1}{4}\right]_{x^\nu} + \left[\frac{x^4(1+x^4)}{6\cdot 12}\right]_{x^{3\nu}} = \left[\frac{1}{1-x^4}\right]_{x^\nu}$$

d.h. Alle Invarianten sind Potenzen einer einzigen der Diskriminante.

$$A = a_0^2 a_3^2 - 3a_1^2 a_2^2 + 4a_1^3 a_3 + 4a_0 a_2^3 - 6a_0 a_1 a_2 a_3$$

$n = 4$

$$w(\nu, 2\nu) = \left[\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{2\cdot 3\cdot 4}\right]_{x^{2\nu}}$$

$$= \left[\frac{1}{2\,3\,4}\right]_{x^{2\nu}} - \left[\frac{x^{\nu+4}(1+x+x^2+x^3)}{2\cdot 3\cdot 4}\right]_{x^{2\nu}} = \left[\frac{1}{2\,3\,4}\right]_{x^{2\nu}} - \left[\frac{x^4(1+x+x^2+x^3)}{2\cdot 3\cdot 4}\right]_{x^\nu}$$

$$= \left[\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\right]_{x^{2\nu}} - \left[\frac{x}{1\cdot 2\cdot 3}\right]_{x^\nu} = \left[\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\right]_{x^{2\nu}} - \left[\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6}\right]_{x^{2\nu}} = \left[\frac{1-x^2+x^3}{2\;4\;6}\right]_{x^{2\nu}}$$

$$= \left[\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}\right]_{x^\nu} = 1 + x^2 + x^3 + \sum A\, x^{2n+3n}$$

d.h. Alle Invarianten ~~sin~~ lassen sich ~~dar~~ aus $i = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$

und $j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$ zusammensetzen ~~(vgl. Fa~~

$n = 5$ etc. vgl. Faa di Bruno Theorie der binären Formen

Cayley Phil. Trans. 1856 Vol 146 pag 137.

~~Beweis~~

Das Hermite-sche Reziprozitätsgesetz:

$$\frac{(1-x^{n+1})\dots(1-x^{n+r})}{(1-x)\dots(1-x^r)} = \frac{(1-x^{r+1})\dots(1-x^{r+n})}{(1-x)\dots(1-x^n)}$$

daraus folgt: D. Eine Zahl p kann ebenso oft als Summe von r Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \dots$ n als von n Zahlen der Reihe

$0, 1, \ldots \nu$ dargestellt werden und

Die Anzahl der Invarianten ν^{ten} Grades einer Form n^{ter} Ordg ist gleich der Anzahl der Invarianten n^{ten} Grades einer Form ν^{ter} Ordnung.

~~Die Anzahl der Cov. ν^{ten} Grades p^{ter} Ordnung ist gleich der Anzahl der Invarianten p^{ten} Grades einer Form ν^{ter} Ordnung.~~ Das Hermitsche Reziprozitätsgesetz gilt auch für Cov. ~~Die Anzahl der Cov. ν^{ten} Grades p^{ter} Ordnung einer Form n^{ter} Ordnung ist = Anzahl der Cov. n^{ten} Grades p^{ter} Ordnung einer Form ν^{ter} Ordnung~~ Eine Form n^{ter} Ordnung hat, wenn n gerade ist, eine und nur eine ~~quadratische~~ Invariante vom Range $p = n$, wenn n ungerade ist keine, ~~dagegen dann eine andere~~ ~~und nur eine kubische Covariante vom Range $p = p$.~~

z. B. Eine Form n^{ter} Ordnung hat, wenn n gerade ist, eine und nur eine quadratische Invariante vom Range $p = n$, wenn n ungerade ist keine, ~~dagegen dann eine~~ eine kubische Invariante vom Range $p = p$.

Eine Form n^{ter} Ordnung hat, wenn $p = n$ ist, ~~ist~~ 1.) für gerade p genau einer Invariante 2ten Grades 2.) bei ungerade p einer 3ten Grades.

§ 8. Die Darstellung der Invarianten als Funktion der ~~Wurzeln~~ Nullstellen von § Colley Heft IV Anhang

Satz und Beweis.

z. B $n = 2$ $\quad A = (12)^2$

$n = 4$ $\quad i = (23)^2(14)^2 + (31)^2(24)^2 + (12)^2(34)^2$

$$j = \{(23)(14) - (31)(24)\}\{(31)(24) - (12)(34)\}\{(12)(34) - (23)(14)\}$$

§ 9 Die Endlichkeit der vollen Invariantensysteme

Aus der obigen Berechnung der Anzahlen der Invarianten liegt die Vermuthung nahe, dass alle Invarianten sich durch eine endliche Zahl ausdrücken lassen. Doch gelang Hilbert und Sylvester der Beweis nicht, so dass sie sogar an der Richtigkeit der Sätze verzweifelten. Erst Gordan symbolisch, dann Mertens und ich ohne Symbolik. Vgl. Meine Abhandlungen (Kleiner Format).

Beweis der Hilfssatzes I $\quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$
$\quad a_1' x_1 + \cdots + a_n' x_n = 0$

Es sei $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix} \neq 0$ dann hat diese Gleichung die Lösung $x_1 = -a_3, \; x_2 = a_1$ etc. Wenn nun $x_1' \neq 0, \ldots$ $x_n' = A_n$ eine

Zunächst für eine ebene Lösung $x_2 = a_1, \; x_1 = -a_2$

beliebige Lösung ist, so kann man durch Subtrahiren der ~~früher~~ gefundenen Lösungen $A_2, \dots A_n$ so reduziren auf $A_2', \dots A_n'$ dass diese Zahlen sämmtlich $< a_1$ sind. Wegen

$$|\alpha_1 A_1'| = |\alpha_2 A_2' + \dots + \alpha_n A_n'| < n a a_1$$

muss ~~kann~~ A_1' absolut $< n a$ bleiben, wo a der grösste der Coefficienten $\alpha_2, \dots \alpha_n$ ist. Zu den bereits aufgestellten Lösungen kann man also stets eine endliche Zahl hinzufügen, so dass durch lineare Combination:

$$x_1 = y_1 x_1^{(1)} + y_2 x_1^{(2)} + \dots + y_m x_1^{(m)}$$

$$\dots$$

$$x_n = y_1 x_n^{(1)} + \dots + y_m x_n^{(m)}$$

wo die y sämmtlich positive ganze Zahlen sind, alle sich ergeben. Diese Werte für $x_1, \dots x_n$ in die übrigen Gl. eingesetzt ergeben ein Gleichungssystem von weniger Gleichungen (mit m Unbekannten) und so ist der Hülfssatz zu beweisen.

Zunächst ~~sei~~ sei bloss eine Gl. etwa die erste gegeben. Man nenne die positiven Coefficienten α: $\alpha_1, \dots \alpha_\varrho$ und die negativen: $-\beta_1, \dots -\beta_\lambda$ und die betreffenden Veränderlichen $\xi_1 \dots \xi_\varrho, \eta_1 \dots \eta_\lambda$, so wird: $\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_\varrho \xi_\varrho = \beta_1 \eta_1 + \dots \beta_\lambda \eta_\lambda$. Eine beliebige Lösung: $\xi_1 = A_1, \xi_2 = A_2, \dots \xi_\varrho = A_\varrho, \eta_1 = B_1, \dots \eta_\lambda = B_\lambda$ kann mit Hülfe der Lösung $\xi_i = \beta_k, \eta_k = \alpha_i$ solange reduzirt werden, bis entweder alle A, oder alle B $\leqq \gamma$ geworden sind, wo γ die grösste der Coeffizienten α, β bedeutet. Sind etwa alle $A \leqq \gamma$, so ist wegen

$\alpha_1 A_1 + \dots \alpha_\varrho A_\varrho = \beta_1 B_1 + \dots \beta_\lambda B_\lambda$ $\quad \varrho \gamma^2 > \beta_1 B_1 \dots + \beta_\lambda B_\lambda$ d.h. alle $B < \varrho \gamma^2$ d.h. solcher reduzirter Lösungen giebt es nur eine endliche Zahl und damit der Satz für eine Gl. bewiesen.
d.h. er giebt eine endliche Anzahl von Lösungen durch welche

mit alle anderen ausgedrückt:

$$x_1 = y_1 x_1^{(1)} + y_2 x_1^{(2)} \cdots y_m x_1^{(m)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = y_1 x_n^{(1)} + y_2 x_n^{(2)} \cdots y_m x_n^{(m)}$$

wo die $y_1 \cdots y_m$ sämtlich positive ganze Zahlen sind. Die Werte für $x_1 \cdots x_n$ in die einzige Gl. eingesetzt ergeben ein Gleichungssystem mit einer Gl. weniger und mit m Unbekannten $y_1 \cdots y_m$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ist die Lösung bekannt.

§10 Der Ω Prozeß.

Der obige Beweis setzt nur für eine oder beliebig viele binäre Grundformen aus. Den ersten allgemeinen Beweis gab ich. Göttinger Nachrichten 1888 u. Math. Ann. Bd. 36. Dazu dient der Ω Prozeß: Der Kürze halber führe ich den Beweis für binäre Formen:

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \cdots + a_n x_2^n \qquad x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 \qquad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$$
$$\varphi(x_1, x_2) = g(y_1, y_2) = b_0 y_1^m + \cdots b_m y_m \qquad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \qquad \Omega = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\delta} - \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\gamma}$$

Ist F irgendeine ganze rat. homogene Funktion der Coefficienten b der transf. Form g vom Grade K und π eine beliebige nicht negative ganze Zahl und α ist der von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ freie Ausdruck $\Omega^{\pi}[\Delta^{\pi} F] = I$ eine Invariante von f.

Zum Beweise schreiben wir statt der Veränderlichen $x_1, x_2 : y_1 y_2$ und wenden dann die lineare Transformation

$$y_1 = \alpha' z_1 + \beta' z_2 \qquad \Delta' = \alpha'\delta' - \beta'\gamma' \qquad \Omega' = \frac{\partial^2}{\partial\alpha'\partial\delta'} - \frac{\partial^2}{\partial\beta'\partial\gamma'}$$
$$y_2 = \gamma' z_1 + \delta' z_2$$

an. Hierdurch geht $f(y_1 y_2)$ in $= g'(z_1 z_2)$ über. Durch Anwendung der zusammengesetzten Substitution

$$x_1 = \alpha'' z_1 + \beta'' z_2 \qquad \Delta' = \Delta\Delta' \qquad \Omega'' = \frac{\partial^2}{\partial\alpha''\partial\delta''} - \frac{\partial^2}{\partial\beta''\partial\gamma''}$$
$$x_2 = \gamma'' z_1 + \delta'' z_2$$

gehe f in g'' über [und weil T die Substitutionscoefficienten α, β, γ, δ nicht mehr enthält]

daher $\Omega^{\kappa+\pi}\left[\Delta^{\pi} F(b)\right] = \Omega'^{\kappa+\pi}\left[\Delta'^{\pi} F(b')\right]$

folglich

$$T(b) = \Omega'^{\kappa+\pi}\left[\Delta'^{\pi} F(b'')\right]$$

oder

$$\Delta^{\pi} T(b) = \Omega'^{\kappa+\pi}\left[\Delta''^{\pi} F(b'')\right]$$

Nun gilt aber, wenn B eine beliebige ganze Funktion der bilinearen Verbindungen:

$$\alpha'' = \alpha\alpha' + \beta\gamma' \qquad \gamma'' = \gamma\alpha' + \delta\gamma'$$
$$\beta'' = \alpha\beta' + \beta\delta' \qquad \delta'' = \gamma\beta' + \delta\delta'$$

ist, die Relation

$$\Omega' B = \Delta\,\Omega'' B \qquad \text{Denn } \frac{\partial}{\partial\alpha'} = \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha''} + \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma''} \text{ etc.}$$

folglich

$$\Delta^{\pi} T(b) = \Delta^{\kappa+\pi}\,\Omega''^{\kappa}\,\Delta''^{\pi} F(b'') = \Delta^{\kappa+\pi} T(a) \text{ d.h.}$$

$T(b) = \Delta^{\kappa} T(a)$. Um zu zeigen, dass auch umgekehrt durch den beschriebenen Process alle Invarianten erhalten werden können, haben wir nur nöthig zu zeigen, dass $\Omega^{\kappa}\Delta^{\kappa}\ (= N) \neq 0$ ist. Dies zeigt sich wenn wir $\Omega^{\kappa} = \left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\delta} - \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\gamma}\right\}^{\kappa}$ entwickelt denken z. B. $\frac{\partial^{2\kappa}}{\partial\alpha^{\kappa}\partial\delta^{\kappa}}$ giebt nur auf $(\alpha\delta)^{\kappa}$ angewandt etwas von 0 verschiedenes und zwar eine positive Zahl etc. so dass $\Omega^{\kappa}\Delta^{\kappa}$ eine Summe von positiven Quadratzahlen wird. Also $T = \frac{1}{N}\Omega^{\kappa}\left[T(b)\right]$ was zu beweisen war.

Nun ist noch nöthig das folgende allgemeine Theorem: Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ vorgelegt, etwa $F_1, F_2, F_3, \dots$, so giebt es stets eine Zahl

m von der Art, dass eine jede Form jener Reihe sich in die Gestalt

$$A = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_m F_m$$

bringen lässt, wo $F_1, F_2, \dots, F_m$ geeignete Formen der nämlichen n Veränderlichen sind.

Zeige die Richtigkeit des Theorems für den Fall $n = 2$. Durch Anwendung dieses Theorems auf das System aller Invarianten ergiebt sich die Existenz von m Invarianten $i_1, \dots, i_m$ derart, dass eine jede andere Invariante i jener Grundform in der Gestalt

$$i = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \dots + A_m i_m$$

ausgedrückt werden kann, wo $A_1, A_2, \dots, A_m$ ganze homogene Functionen der Coefficienten der Grundform sind. Der 2te Schritt besteht darin, zu zeigen, dass in dem Ausdruck $A_1 i_1 + A_2 i_2 + \dots + A_m i_m$ die Functionen $A_1, A_2, \dots, A_m$ stets durch Invarianten ersetzt werden können, ohne dass sich dabei der Werth des Ausdrucks ändert. Die A können wir homogen und von solchem Grade in den Coefficienten der Form a voraussetzen, dass alle Producte A_i von dem Grade der linken Seite i ausfallen. Dann setzen wir in jener Identität für die a die b ein und erhalten dann

$$\Delta^{\pi} i = \Delta^{\pi_1} B_1(b)\, i_1 + \dots + \Delta^{\pi_m} B_m(b)\, i_m$$

die π malige Anwendung des Prozesses R liefert dann die Gleichung

$$i = \mathfrak{J}_1 i_1 + \mathfrak{J}_2 i_2 + \ldots + \mathfrak{J}_m i_m \quad \text{u. s. w.}$$

§11. $k = n-2$

Das System der Invarianten $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1, \ldots \mathfrak{J}_k$.

Zunächst zieht man folgendes: Aus dem vollen Invariantensystem $i_1, \ldots, i_m$ von den Graden beziehungsweise $r_1, \ldots, r_m$ lassen sich gewisse k Invarianten $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_k$ zusammen setzen, zwischen denen keine algebraische Relation stattfindet und durch welche sich jede andere Invariante ganz und algebraisch ausdrücken läßt. In der That man setze $i_1' = i_1^{\frac{N}{r_1}}, \ldots, i_m' = i_m^{\frac{N}{r_m}}$. Besteht dann noch eine Relation zwischen diesen, so muss dieselbe homogen sein, etwa von der Gestalt $G(i_1' \ldots i_m') = 0$ dann setze $i_1' = \alpha_{11} i_1'' + \ldots + \alpha_{1m} i_m'' \ldots$ und bestimme die α so, dass ihre Determinante von 0 verschieden und der Coefficient der linear transformirten Function $H(i_1'', \ldots, i_m'')$ d. h. die Grösse $G(\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{mm}) = 1$

wird, u. s. f. Für eine einzige binäre Grundform wird $\varkappa = n-2$ z. B. $n=4$ und $n=5$ in welch letzterem Falle es 3 Invarianten giebt von den Graden 4, 8, 12 und wo die letzte, die schiefe R in Quadrat erhoben durch die ersteren 3 rational ausdrückbar ist. Die Simultaninvarianten 3ter und 1ter Ordnung d. h. die Covarianten der cubischen Form sind f selbst $h = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + \ldots$ *) und die Discriminante D. In der That ist die letzte Covariante $g = (f, h)_1 = (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x^3$ ‡) ausdrückbar, vermöge der Relation $g^2 - D f^2 + 4 h^3 = 0$ schliesslich die Covarianten der biquadratischen Form sind: $f, i, j, h = (a_0 a_2 - a_1^2) x^4 + \ldots$ und $t = (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x^6 + \ldots$ und in der That ist die letztere ausdrückbar, vermöge der Relation $t^2 = i f^2 h - 4 h^3 - j f^3$.

Ferner zeigt man leicht, dass man zu jenen $\varkappa$ Invarianten stets eine Invariante I hinzufügen kann, derart dass eine jede andre Invariante sich rational durch $I, I_1, \ldots I_\varkappa$ ausdrücken lässt, bestätige dies durch die obigen Beispiele.

*) $+ (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2$

‡) $+ 3(a_0 a a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x_2 - 3(a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 - (a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3) x_2^3$

Nunmehr erfordert rückwärts die Construction des vollen Invariantensystems $i_1, \ldots, i_n$ in falls man die Invarianten $I, I_1, \ldots, I_k$ kennt nur noch die Lösung der elementaren Aufgabe alle Functionen zu construiren, welche ganz von $I_1, \ldots, I_k$ und rational von $I, I_1, \ldots, I_k$ abhängen. In der That ist jede solche Function i eine ganze rationale Invariante. Denn setzen wir $i = \frac{g}{h^s}$ wo g und h ganze rationale Functionen von den Coefficienten der Grundform ohne gemeinsamen Theiler sind in die Gleichung $r$ten Grades, welcher i genügt, ein und multipliciren dieselbe dann mit h^{r-1} so ergiebt sich, dass $\frac{g^r}{h^s}$ ganz und rational in den Coefficienten der Grundform sein muss, d. h. h ist eine Constante. An den obigen Beispielen ist dies leicht bestätigt, da die überschüssige Invariante jedesmal schief d. h. von ungeradem Gewichte ist, und die Gleichung für diese schiefe nur eine quadratische ist. Nennen wir die schiefe also S so muss jede Invariante des vollen Systemes

von der Gestalt $A\mathfrak{S}+B\mathfrak{T}$ sein, und daraus ergiebt sich entweder $A=0$ und B durch 6 theilbar oder $B=0$ und A durch 6 theilbar.

§ 12.

Das Verschwinden der Invarianten

kleine Anzahl. Ueber volle Invariantensysteme §3, §4.
Eine solche Form ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ ohne Invariante heisst Nullform. Um den Satz praktisch zu verwerthen bedarf es der Kenntniss der Nullformen, zuerst für binäre Formen bestimmt ist:

§ 13

Die binären Nullformen.

Ueber volle Invariantensysteme §5, §6

Die simultanen Invarianten einer binären Form und einer Form ersten Grades werden nämlich $=0$, wenn der vielfache Faktor einer gleich mit der linearen Form bis auf eine Constante übereinstimmt. Dies ersieht man leicht, wenn $x_1 = 0$ jener Faktor ist; ~~dann~~ ist dann $l = b_0 x_1$, so hat ja jede Simultaninvariante die Gestalt:

$$b_1^s(a) \cdot + b_1^{s-1} b_0 (a)_r \cdots b_0^s(a)$$

und dies wird für $b_1 = 0$ in $b_0^s(a)$ übergehen, wo (a) von höchstem Gewichte ist aber ~~xxxxxxx~~ $\frac{nr}{2}$, wo r der Grad in a bezeichnet

und folglich verschwindet der Ausdruck (a). Nunmehr lassen sich die obigen Beispiele der Form 5ter Ordnung und der Covarianten einer Form 3ter und 4ter Ordnung leicht zur Illustration unserer Hauptsätze verwenden. Man braucht eben nur zu zeigen dass z. B. für die Form 3ter Ordnung eine lineare Form l der Verschwinden von D, f, h nothwendig zur Folge hat, dass l als Doppelfaktor in f steckt, dann ist folglich auch $g = 0$ und folglich ganz durch f, D, h ausdrückbar. Ebenso fest auch, dass h ganz u. algebraisch durch f, D, g ausdrückbar sind etc.

§ 14

Die ternären Nullformen.

Ueber volle Invariantensysteme" § 18

Man kann auch für ternäre Formen alle Nullformen aufstellen, wenn auch mit bedeutend grösseren Schwierigkeiten. Einführung der Begriffe der kanonischen Nullform, die wir ja auch schon für binäre Formen hatten: ($a_0 = 0, a_1 = 0, \ldots a_h = 0$; $h = \frac{n}{2}, \frac{n-1}{2}$). Construktion der ternären kanonischen Nullformen mittelst der Figuren auf S. 364–365 meiner Arbeit. Beweis, dass dies die wahren Nullformen sind. Geometrische Bedeutung der singulären Gebilde der Curven, welche entstehen, wenn man die eine Nullform = 0 setzt.

371.

176 11.6.87
177 23.4.99
178.9 7.7.99
179 18.5.2000
181,5 22.8.2000
86 4.6.03

© SUB GÖTTINGEN/GDZ